This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

MATH
8108
91

Digitized by Google

GODFREY LOWELL CABOT
SCIENCE LIBRARY

HARVARD COLLEGE LIBRARY

GIFT OF

HAVEN FUND

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Praktische Geometrie

für

Volks- und Fortbildungsschulen,

sowie für

Seminarvorbereitungsanstalten.

In anschaulicher Darstellung,

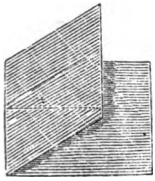
entwickelnder Lehrform und praktischer Anwendbarkeit

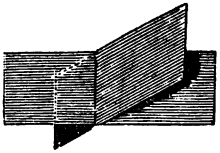
von

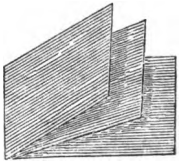
Dr. C. Kehr,

weiland Schulrat und Seminardirektor in Erfurt.

Neubearbeitung von **B. Haro**, Seminarlehrer in Liegnitz.







Siebente Auflage.

Mit in den Text eingedruckten Figuren, einer Tafel Körpernetze und vielen Übungsaufgaben.

Gotha.

Verlag von E. F. Thienemanns Hofbuchhandlung.

1891.

Digitized by Google

~~1. 7039~~
Math 8108.91
HARVARD COLLEGE
JUL 25 1892
LIBRARY.
James Ford
1565
68

Digitized by Google

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die Geometrie hat, wie jede andere Wissenschaft, ihren formalen und materialen Wert. Der materiale Nutzen der Geometrie für das Volk zeigt sich besonders in den Geschäften des bürgerlichen Lebens; denn die meisten bürgerlichen Gewerbe fußen auf mathematischen Lehren. Will der Maurer den kubischen Inhalt einer Mauer und daraus die Quantität der dazu erforderlichen Baumaterialien berechnen; will der Zimmermann ein Haus bauen, den Bauriß mit Kostenanschlag fertigen; will der Schreiner den Kubikinhalt eines Bloches und dessen Wert berechnen; will der Böttcher oder Klempner bestimmen, wie groß die zu fertigenden Gefäße werden sollen, damit sie eine bestimmte Quantität Flüssigkeit fassen; will der Schmied oder der Schlosser, der Maschinenbauer oder der Drechsler, der Tüncher oder der Glaser ꝛc. ꝛc. die gefertigten oder zu fertigenden Arbeiten berechnen und zeichnen: so sind ihnen, wie allen Handwerkern, welche in Holz, Stein, Metall ꝛc. arbeiten, geometrische Kenntnisse unentbehrlich, da außerdem durch unzuverlässiges Probieren Material, Geld, Zeit und kostbare Arbeitskraft vergeudet wird. Aber nicht allein dem Handwerker, sondern auch dem Landmanne muß es wünschenswert sein, die Kenntnis der mathematischen Elemente zu besitzen. Der strebsame Landwirt empfindet den Mangel solcher Kenntnisse sehr schmerzlich, wenn er nicht im stande ist, die Größe eines Ackerstückes, einer Wiese, eines urbar zu machenden Platzes und daraus den Ertrag und Wert desselben zu bestimmen, oder den Kostenbetrag eines Abzugsgrabens, einer Drainierung, eines auszustechenden Teiches ꝛc. zu berechnen. Bei den Anforderungen der Gegenwart sollte überhaupt jedem nur einigermaßen Gebildeten diese wissenschaftliche Grundlage nicht fehlen.

Digitized by Google

Noch höher als der materiale Nutzen ist aber die durch die Geometrie erzeugte formale Bildung anzuschlagen; denn der geometrische Unterricht weckt den Formensinn, schärft den Geist für Ebenmaß und Regelmäßigkeit und behütet den Menschen vor einem gedankenlosen und gleichgültigen Anschauen der Dinge; er hellt den Geist auf, schärft den Verstand, weckt das Nachdenken, bildet den Sinn für Wahrheit, Gründlichkeit und Ordnung und giebt dem Menschen Sicherheit im Urteilen und Schließen, Festigkeit und Halt im Leben.

Soll der geometrische Unterricht diese Wirkungen erzeugen, dann ist freilich vor allem notwendig, daß er in rechter Weise erteilt wird. Denn wo man keinen Wert auf die rechte Art und Weise der Unterrichtserteilung legt, da treten dann jene befremdenden Erscheinungen zutage, die geradezu das Gegenteil von dem sind, was oben als das Ergebnis des geometrischen Unterrichts bezeichnet wurde.

Die Klagen über die mangelhaften Erfolge des geometrischen Unterrichts sind von den verschiedensten Seiten laut geworden. So wird es z. B. in der von Dr. Vogel und Fr. Körner herausgegebenen Zeitschrift „Die höhere Bürgerschule" als eine „vielfach gemachte Erfahrung" bezeichnet, daß „sowohl auf Realschulen wie auf Gymnasien viele Schüler in der Mathematik nichts Genügendes leisten und bei allem Fleiße nicht im stande sind, den Lehrer der Mathematik zu befriedigen". Auch K. Snell stimmt in der Vorrede zu seinem „Lehrbuche der geradlinigten Planimetrie" (Leipzig, bei Brockhaus) in die Klage ein, „daß der geometrische Unterricht vieler Lehrer, bei denen die Lehrmethode des Euklid zum Kanon der mathematischen Orthodoxie geworden sei, den Schülern nicht das Gefühl der Stärkung und edlen Kräftigung, sondern meistens nur das einer widerlichen zwanghaften Anstrengung und einer gewaltsamen Gliederverdrehung verleihe, so daß das Studium mathematischer Werke bei vielen den Eindruck einer Tortur des Denkens erzeuge". Und der berühmte Mager, welcher in seiner „Pädagogischen Revue" mit schneidender Schärfe die scholastische Pedanterie der alten Mathematiker geißelt, sagt, „daß die meisten jungen Leute gern eine Anzahl Peitschenhiebe aushalten würden, wenn sie dadurch Dispensation von den mathematischen Stunden erlangen könnten".

Solchen übereinstimmenden Klagen gegenüber ist es wohl in der Ordnung, daß man nach dem Grunde dieser Klagen fragt. In der Sache selbst, im geometrischen Lehrstoffe, kann der geringe Erfolg nicht liegen; denn läge die Schuld am Stoffe, dann müßten ohne Ausnahme alle Schüler den gerügten Mangel zeigen. In den Schülern kann der Grund auch nicht liegen. Zwar hat man die Behauptung

Digitized by Google

aufgestellt, daß zum erfolgreichen Betriebe des geometrischen Unterrichts extra dafür organisierte Köpfe, auserlesene Geister und angeborene Talente notwendig seien. „Dichter und Mathematiker müssen geboren werden", hat man gesagt. Freunde des geometrischen Unterrichts haben diese Behauptung aufgestellt, vielleicht weil sie sich über den Besitz „ihres" mathematischen Talentes geschmeichelt fühlten, — und Feinde haben beigestimmt, weil sie geglaubt haben, sich dadurch am ersten über den Mangel ihrer geometrischen Kenntnisse zu trösten. In Wahrheit aber kann nichts falscher sein als die Behauptung, daß zum Verständnis der Geometrie ein besonderes Genie gehöre. „Wohl ist es wahr", sagt Falk, „daß der „produktive mathematische Kopf ebenso gut wie der Dichter geboren werden muß; aber so gut Millionen von nicht produktiv-poetischen Köpfen die vorhandenen Gedichte verstehen und mit Entzücken lesen, ebenso gut muß jeder Mensch von gesundem Menschenverstande dazu befähigt sein, die einmal schon gefundenen mathematischen Sätze in sich aufzunehmen. Denn die ganze Mathematik beruht auf den einfachen Vorstellungen von Raum und Zahl; wer diese nicht begreifen kann, ist ein Schwachsinniger; — die Verknüpfung der einzelnen Vorstellungen beruht auf den einfachsten logischen Denkakten; wer diese nicht auszuüben vermag, der ist ein unlogischer Kopf und wird auch in anderen Disziplinen nichts leisten." Der Prätension, als ob zum mathematischen Verständnis ganz besondere Geistesanlagen nötig seien, kann man getrost die andere Behauptung gegenüberstellen, daß es kaum eine Wissenschaft giebt, welche in ihren Elementen jedem ohne Ausnahme so verständlich und zugänglich gemacht werden kann, wie gerade die Geometrie. In den Volksschulen mag man sich über den Vorzug zwischen Raum- und Zahlenlehre streiten; daß aber die Raumlehre leichter verständlich zu machen ist als die Zahlenlehre, darüber kann unter Sachverständigen kein Streit mehr sein. Ist die Raumlehre doch sogar den kleinsten Kindern zum Verständnis zu bringen, was der Gründer der Kindergärten, Fr. Fröbel, evident bewiesen hat, indem er mit praktischem Griffe seine hauptsächlichsten Anschauungsmittel aus dem Gebiete der Geometrie genommen hat. — Die Schwierigkeit und Fruchtlosigkeit des geometrischen Unterrichts liegt also weder im Lehrstoffe, noch in der Organisation des Lernenden. Sie liegt auch nicht in der Unfähigkeit der Lehrer, denn gerade auf diesem Gebiete wirken viele außerordentlich tüchtige Kräfte; sie liegt lediglich und allein in — der Methode. Die alte Euklidische Methode ist sicherlich, wenigstens für den Anfang, nicht geeignet, den Schüler mit Begeisterung für mathematische Wahrheiten zu erfüllen. Wo in aller Welt soll beim Schüler

Digitized by Google

Lernfreudigkeit herkommen, wenn er gleichsam mit verbundenen Augen durch die labyrinthischen Gänge streng-mathematischer Beweise geführt wird. Die weißen Linien, die der Lehrer seinen Schülern an die schwarze Wandtafel malt, wobei er ihnen stundenlang den Rücken zukehrt, vermögen im Schüler nicht das geringste Interesse wachzurufen. Und die Lehrsätze, deren Inhalt der Schüler so wenig versteht, wie er die Beweise versteht, deren Notwendigkeit oder Möglichkeit er durchaus nicht einzusehen vermag, können den Schüler unmöglich zur Lernlust reizen. Mit verglasten Augen starrt er nach der mit Figuren bemalten Wandtafel, in seinem Gesichte spiegelt sich die Langeweile, und wenn der Schüler dann weiterhin seine Gefühle durch oft wiederholtes Gähnen kundgiebt, wenn er unruhig wird, seine Nachbarn neckt, endlich die Lehrstunden versäumt und schließlich die Geometrie für einen so faden, trockenen und ungenießbaren Unterrichtsgegenstand findet, daß es ihm unbegreiflich erscheint, wie nur irgendein vernünftiger Mensch an dieser Wissenschaft Gefallen finden kann: so kann man dies dem Schüler wahrhaftig nicht verdenken. Das Beste, was ein Lehrer in seinen Schülern wecken soll, — die Lernlust — weckt ein solcher Unterricht *nicht*; durch die Vorträge, in denen der Lehrer seinen Schülern *vor*denkt, ohne daß die Schüler ihrem Lehrer *nach*denken, wird nichts weiter erreicht, als daß die Aufmerksamkeit eingeschläfert, das Interesse erstickt und die Unlust großgezogen wird. Von dem hohen Gewinne und dem großen Reize des geometrischen Unterrichts, der den Sinn und die Gedanken der Jugend öffnen soll, findet sich meist nichts weiter als — das Gegenteil. Und dieses traurige Resultat ist lediglich und allein erzielt worden durch — die verkehrte Methode. Wer erinnerte sich bei solchen Betrachtungen nicht an *Diesterwegs* wahres Wort: Die Lehrmethode ist ebenso wichtig wie der Lehrstoff, das Wie ebenso nötig wie das Was! „Die Kraft des Lehrers ruht in seiner Methode."

Solchen Wahrheiten gegenüber, die durch die Erfahrung tausendfach bestätigt werden, erwächst für jeden Lehrer die Pflicht, einer naturgemäßeren und Lernfreudigkeit erweckenden Lehrmethode mit Ernst nachzudenken. Dieses ernstliche Nachdenken wird mit um so besserem Erfolg gekrönt werden, je mehr der Lehrer die Wahrheit an der Hand der Geschichte der Methodik sucht. Das Wort *Crügers*: „Die Geschichte der Physik ist auch ihre Methode", ist auch für den geometrischen Unterricht zutreffend. Wer bezugs des geometrischen Unterrichts die Ansichten des pädagogischen Großmeisters *Pestalozzi* kennt, der mit seiner Trinität: „Wort, Form und Zahl", die Welt erobern wollte; wer ferner weiß, wie auf dem Grunde des Pestalozzischen Prinzips seine

Digitized by Google

Nachfolger fortgebaut haben — es sei hier nur an Joseph Schmid, Ramsauer, Graßmann, Harnisch, Diesterweg u. m. a. erinnert —, der wird auch nicht im unklaren sein, daß durch die geschichtliche Entwicklung drei Forderungen sich als unumstößlich wahr herausgestellt haben. Die erste ist, daß der erste geometrische Unterricht von der dürren Abstraktion losgelöst ist und auf den fruchtbaren Boden der Anschauung verpflanzt wird: der erste geometrische Unterricht muß Anschauungsunterricht sein. Zum zweiten dürfen die geometrischen Wahrheiten nicht als ein bereits Fertiges gegeben werden, sondern der Schüler muß sie unter Beihilfe des Lehrers suchen. Es ist darum beim ersten geometrischen Unterricht die entwickelnde Lehrform in Anwendung zu bringen. Das Dritte endlich ist, daß die Geometrie nicht außer Beziehung zum Leben gesetzt werden darf, sondern daß sie, wie alles Lernen, vom Leben ausgehen und zum Leben zurückführen muß. In dieser Anwendung der erworbenen Kenntnisse ist die dritte Forderung begründet: der erste geometrische Unterricht muß praktisch sein.

Ich rede absichtlich hier nur vom ersten geometrischen Unterricht, zunächst weil das vorliegende Buch nur den Unterricht in den Elementarschulen ins Auge faßt, also nur eine Propädeutik des späteren (wissenschaftlichen) Unterrichts sein will; sodann aber auch, weil der erste Unterricht so überaus wichtig ist, daß der richtige Betrieb desselben den späteren Fortschritt und Erfolg mit Notwendigkeit bedingt. „Die Sicherheit des Wissens hängt, wie die Festigkeit eines Gebäudes, vom unteren Stockwerke ab."

Für junge Lehrer — und für solche ist das Buch vorzugsweise berechnet — wird es jedenfalls von Wert und Interesse sein, die oben geforderten Bedingungen eines gedeihlichen geometrischen Unterrichts etwas näher zu betrachten.

1. Der Unterricht in der Geometrie muß Anschauungsunterricht sein. „Was nicht durch die Sinne geht, ist überhaupt nicht im Geiste", sagt Comenius. Erst durch die Anschauung erhalten die Worte und Begriffe Gehalt und Wert; ohne Anschauung ist alles Denken hohl. „Darum gewinnt man auch" — sagt Diesterweg — „nur durch die Anschauung eine lebendige Einsicht in das Wesen der Dinge; denn nur durch sie erzeugt man wahren Lerneifer und wahre Bildung. Daher ist auch nur der ein guter Elementarlehrer, welcher sich nicht eher bei seinem Wissen beruhigt, als bis er die Sache anschaulich erkannt hat. Einen solchen braucht man vor abstraktem Unterricht nicht zu warnen, denn er denkt nicht abstrakt und hat an

Digitized by Google

seinem eigenen anschaulichen Erkennen einen Maßstab dafür, was in die Volksschule gehört und was nicht; sein ganzes Streben geht dahin, auch in seinen Schülern die anschauliche Kenntnis zu erzeugen. Darin steckt das ganze Geheimnis der Elementarmethode."

Oben habe ich das Crügersche Wort: „Die Geschichte einer Wissenschaft ist auch ihre Methode", angeführt. Sehen wir auf die Entwickelungsgeschichte der Menschheit, so finden wir diese Wahrheit auch in der Entwickelung der geometrischen Methode bestätigt. Wie nämlich in allen Wissenschaften, so ist auch in der Geometrie die Menschheit von der Anschauung ausgegangen und erst später zum Begriff emporgestiegen. Die ersten Menschen und Völker, welche überhaupt Geometrie betrieben, haben ganz sicher nicht mit Lehrsätzen angefangen und sicherlich sich nicht mit Aufsuchung mathematischer Beweise beschäftigt, sondern sie haben mit Anschauungen begonnen, Erfahrungen gesammelt und sind erst durch die gesammelten Anschauungen und Erfahrungen zur Aufstellung bestimmter Lehrsätze und dann zum Beweisen derselben gekommen. Der Beweis für die Richtigkeit dieser gefundenen Lehrsätze konnte anfänglich unmöglich mathematisch-streng sein, er war nur auf die Anschauung gegründet. Erst dem freien Geiste der Griechen wurde die Aufgabe zuteil, an die Stelle des anschaulichen Erkennens den logischen Beweis zu setzen und auf dem Wege streng-mathematischer Entwickelungen neue Wahrheiten zu suchen. Denselben Entwickelungsgang, den hier der göttliche Welterzieher bei Führung der Menschheit eingehalten hat, haben auch wir beim Einzelmenschen einzuhalten. Denn wie sich die Menschheit im Kindesalter von der Menschheit im Jünglingsalter bezugs ihrer geistigen Entwickelung unterscheidet, so unterscheidet sich noch heute das Kind vom Jünglinge; für den Knaben gehört auf dem Gebiete der Geometrie die konkrete Anschauung, für den Jüngling gehört der logische Beweis. Wer diesem Wege, den die Natur gegangen ist, nachgeht, unterrichtet naturgemäß; wer dagegen, statt mit geometrischen Anschauungen, mit geometrischen Begriffen, mit geometrischen Lehrsätzen und mit geometrischen Beweisen anfängt, handelt naturwidrig und versündigt sich an der Natur des Menschengeistes.

Man führe also dem Anfänger zuerst die geometrischen Gebilde in konkreter Gestalt vor die Seele, lasse die Schüler schauen, tasten, messen, teilen, zusammensetzen und führe sie so von der Anschauung zum Begriff, von der Erfahrung zum Lehrsatz, vom Lehrsatze zu seinen Folgerungen, vom Konkreten zum Abstrakten. In dieser naturgemäßen Stufenfolge suche man seinen Stolz, nicht aber darin, daß man bei

Digitized by Google

Paradeprüfungen die kleinen Jungen die großen spielen und von ihnen mit ausgezeichneter Zungenfertigkeit die diktierten und auswendig gelernten streng-mathematischen Beweise herschnattern läßt. Mit Lessings Wort: „Ich bitte mir alles natürlich aus", will ein solches Verfahren so wenig harmonieren, wie mit den Forderungen der Wahrhaftigkeit und Sittlichkeit.

Ein Einwand muß hier seine Widerlegung finden. Es giebt eine Anzahl Leute, welche mit ganzem Herzen dem Prinzipe der Anschauung zustimmen, die aber entweder so bequem sind, daß sie sich nicht die Mühe nehmen, die nötigen Veranschaulichungsmittel zu beschaffen, oder so leichtsinnig, daß sie die betreffenden Anschauungsmittel — vergessen. Sie entschuldigen sich dann gewöhnlich damit, daß die Anschaulichkeit schon in der Lebendigkeit des Vortrages liege und daß es schon genüge, wenn man nur mit Worten die Sache recht anschaulich darstelle und beschreibe, — konkrete Anschauungsmittel brauche man dann nicht. Diese Auffassung, wenn sie ehrlich gemeint ist, beruht auf einem Grundirrtume. Wie will man denn z. B. ohne konkrete Anschauung, nur allein durch einen klaren und lebendigen Vortrag und durch eingehende, haarscharfe Beschreibung den Lehrsatz der Geometrie verdeutlichen: „In jeder Pyramide verhalten sich die parallelen Durchschnittsflächen wie die Quadrate ihrer Spitzenabstände"? Kann man denn so ohne weiteres voraussetzen, daß dem Schüler die Begriffe „Pyramide", „parallel", „Durchschnittsfläche", „Quadrate", „Spitzenabstände" bekannt sind? Kann man denn so ohne weiteres annehmen, diese Begriffe ließen sich beschreiben und die Beschreibung ersetze die Anschauung? Was nützt es denn dem Schüler, der noch keine Pyramide gesehen hat, zu sagen: denke dir eine Pyramide!? Was hilft es denn, dem Schüler, der weder eine Pyramide noch eine Grundfläche, noch einen parallelen Durchschnitt gesehen hat, zu sagen: denke dir, die Pyramide sei parallel mit der Grundfläche durchschnitten!? Man sieht daraus: zwischen Vorstellung und Anschauung, zwischen anschaulicher Beschreibung und konkreter Auffassung ist eine große Kluft! Die konkrete Anschauung läßt sich weder durch einen lebendigen Vortrag, noch durch eine breite Umschreibung, noch durch Zeichnungen an der Tafel ersetzen. Die Vorzeigung und Anschauung der wirklichen Gegenstände geht über alles! Ohne konkrete Anschauung ist der Unterricht für den Schüler nichts weiter als ein begriffsloses Konglomerat von Worten ohne Verständnis, von Sätzen ohne Inhalt. Wer von einem anschaulichen Unterrichte redet und dabei doch keine konkrete Anschauung für nötig hält, gleicht einem Schwimmlehrer, der seine

Digitized by Google

Schüler nicht ins Wasser führen will. An geometrischen Veranschaulichungsmitteln darf es darum der Lehrer nie fehlen lassen; er kann hierin weit eher zu wenig als zu viel thun. So muß z. B. ein Parallelogramm aus Papier, in der Richtung einer Diagonale zerschnitten, dem Schüler beweisen, daß ein Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist, mit dem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat; die Folgerung für die Berechnung der Dreiecke ergiebt sich daraus von selbst. Ein Faden, welcher einmal um den Rand einer kreisrunden Scheibe gelegt wird, beweist dem Schüler, daß der Umfang des Kreises ungefähr $3\frac{1}{7}$ mal so groß ist, als der Durchmesser desselben, so daß sich der Durchmesser zum Umfange wie 7:22 verhält. Damit ist dem Schüler zugleich der Weg gewiesen, aus dem Durchmesser eines Baumstammes dessen Umfang, oder umgekehrt, zu ermitteln. Eine Möhre ꝛc., nach verschiedenen Richtungen durchschnitten, zeigt dem Schüler die verschiedenen Formen der Kegelschnitte. Um ferner den Satz aus der Kongruenz der Dreiecke zu beweisen, nach welchem drei Seiten eines Dreieckes das Dreieck selbst bestimmen, nehme man zuerst vier Stäbe oder Drähte, füge dieselben an ihren Enden beweglich ineinander und zeige dem Schüler, daß mit vier Seiten sehr verschiedene Vierecke entstehen; man entferne einen Draht ꝛc. und der Schüler wird durch die Anschauung leicht zu der Erkenntnis kommen, daß drei Seiten die Größe und Form eines Dreiecks bestimmen und daß mit diesen drei bestimmenden Stücken nur die Bildung eines einzigen Dreiecks möglich ist. Und wie auf dem Gebiete der Planimetrie, so muß auch auf dem Gebiete der Stereometrie der Schüler die geometrischen Wahrheiten zuerst durch konkrete Anschauung erhalten; der Schüler muß sich Körper aus Draht, Thon, Pappe oder Holz fertigen, daran die Begriffe Ecke und Kante, Grund- und Seitenflächen kennen lernen, überall von der anschaulichen Betrachtungsweise zur begriffsmäßigen emporsteigen und auf dem Wege der Anschauung, der Induktion brauchbares Material zum späteren Verbrauche im Dienste einer strengeren Wissenschaft sammeln.

Die Anschauung ist das Erste, Höchste, Beste. Aber sie ist nicht das Letzte und nicht das Einzige. Wenn der Schüler die geometrischen Gebilde anschaut, dann befindet er sich zunächst nur in einem passiven Zustande. Er nimmt nur in sich auf, was ihm von außen dargeboten wird. Das bloße Aufnehmen an sich genügt aber noch nicht. Der Schüler, der bisher nur passiv war, muß nun auch aktiv werden: er muß aus dem Zustande der Rezeptivität heraus- und in den Zustand der Produktivität übertreten. Dies kann nun zunächst dadurch geschehen, daß der Lehrer den geometrischen Unterricht in entwickeln-

Digitized by Google

der Weise erteilt. Wir kommen damit zum zweiten Teile unserer Betrachtung.

2. Der geometrische Unterricht muß in entwickelnder Weise erteilt werden. Um dieser Forderung zu genügen, muß der Lehrer den Schüler zunächst veranlassen, sich über das, was er angeschaut hat, klar und bündig auszusprechen. Wird diese Forderung vom Lehrer nicht berücksichtigt, dann ist es möglich, daß der Schüler trotz der konkreten Anschauung in ein dumpfes Hinbrüten, in ein Scheindenken verfällt, das nimmermehr zum Ziele führt. Hält dagegen der Lehrer mit unerbittlicher Konsequenz auf Deutlichkeit und Bestimmtheit der sprachlichen Darstellung, dann ist der Schüler in die Notwendigkeit versetzt, sich den ihm vor die Sinne gestellten Gegenstand genau anzuschauen. Denn klares Sprechen ist nicht möglich ohne klares Denken, und klares Denken hat klares Anschauen zur Voraussetzung. Das logische Zuchtmittel der Sprache sollte man beim geometrischen Unterrichte nie aus den Augen lassen.

Soll aber der Schüler über das Angeschaute vollständig und prägnant sich aussprechen, dann muß ihm der Lehrer dazu Veranlassung geben: der Lehrer muß den Schüler fragen. Die einzig richtige Lehrform für den geometrischen Unterricht ist also die Frageform. Die dozierende, akroamatische Lehrweise ist hier am unrechten Platze. Aber das Fragen an sich führt auch noch nicht zum Ziele, denn wenn der Lehrer den Schüler durch Kreuz- und Querfragen von einer Vorstellung zur anderen zerrt und die Sache haarspaltend bis in seine kleinsten Teile zerfragt, so ist damit nicht das Mindeste genützt, wohl aber viel geschadet. Notwendig ist vielmehr, daß der Lehrer in Gemäßheit eines bei ihm im voraus festgestellten Planes fragt, und daß er durch sein Fragen den Schüler so führt, daß dieser auf dem Wege des Suchens den Lehrsatz und dessen Folgerungen entdeckt und findet. Also nicht die Frageweise an sich, sondern die entwickelnde Frageweise muß gefordert werden. Bei der entwickelnden (der erotematisch-heuristischen) Lehrform übernimmt der Lehrer die Rolle eines Steuermannes, der dem Schifflein des Unterrichtes unbemerkt den rechten Weg bestimmt, es vor Ab-, Um- und Irrwegen bewahrt und es auf sicherem Wege zum Ziele führt. Bei keinem Unterrichtsgegenstande leistet die entwickelnde Lehrform so Ausgezeichnetes, wie beim geometrischen Unterrichte. Sie beginnt mit dem Konkreten und führt ohne Sprung, streng stufenweise, zur Abstraktion, sie faßt die von der Anschauung gelieferten Einzelvorstellungen zu einem Ganzen, zum Begriffe zusammen, sie versetzt den Schüler dabei nicht bloß in die Notwendigkeit, zu sehen, sondern auch

Digitized by Google

einzusehen, nicht bloß die geometrischen Wahrheiten kennen zu lernen, sondern auch sie zu verstehen. Durch die entwickelnde Lehrweise wird der Schüler einerseits vor allem passiven Hinnehmen und allem papageimäßigen Nachsprechen bewahrt und anderseits auch in eine Selbstthätigkeit und Regsamkeit versetzt, die vor Träumerei bewahrt und zu einem Wissensdurste führt, der mit immer neuer Liebe und mit stets wachsendem Interesse nach neuen Wahrheiten sucht. Dabei wird der Individualität des Schülers das volle Recht gesichert, denn beim entwickelnden Unterrichte, der nicht mit dem Lehrsatze anfängt, sondern mit ihm endigt, gilt der didaktische Grundsatz: Besser ein Satz auf zehn Arten, als zehn Sätze nach einer Art.

Wohl ist es wahr, daß man beim dozierenden Unterrichte schneller zum Ziele kommt, als beim entwickelnden; man braucht in ersterem Falle die Wahrheit nicht erst suchen zu lassen, sondern man „giebt" sie dem Schüler als etwas bereits Fertiges. Schade nur, daß wir es nicht mit einem ausgebildeten Verstande zu thun haben, sondern mit einem ungebildeten, der erst gebildet werden soll! Schade nur, daß durch das Dozieren das Beste, was der Unterricht erreichen soll, nicht erreicht wird: die Selbstthätigkeit wird nicht geweckt, der Forschungstrieb wird nicht erregt, Begeisterung für das Lernen wird nicht erzielt und wahre Bildung nicht erreicht! In dieser Beziehung sagt Falk ganz treffend: „Wenn ein Lehrbuch in präziser, oder ein Lehrer in etwas weitläufiger Weise seinen Schülern vorpredigt: ‚Geometrie ist die Lehre vom Raume', ‚Größe ist . . . . . ' u. s. w., so gemahnt das an einen Vater, der seinem Kinde die Nahrung in unverdaulicher Form geben wollte. Gerade so aber, wie einem naturgemäßen und gesunden leiblichen Assimilationsprozeß erst Hunger oder Appetit vorausgehen muß, ebenso muß auch die geistige Assimilation von einem geistigen Hunger bedingt sein. Wenn man den Schüler freilich zu einem leeren Gefäße degradiert, das willig aufnehmen muß, was ein weiser Erzieher hineinzufüllen für gut findet, dann ist es freilich kein Wunder, wenn in solchem Falle beim Unterrichte auch keine Symptome geistigen Lebens sich zeigen, oder wenn Unaufmerksamkeit und Faulheit bekunden, daß der natürliche Instinkt des Knaben gegen eine solche Mißachtung sich auflehnt." Dieses Vollfüllen, Vollstopfen und Vollpfropfen, wie es dem dozierenden Unterrichte eigen ist, ist allerdings der kürzeste Weg, — nämlich der kürzeste Weg, um dem Schüler die Lust am Lernen für immer zu verleiden, und der beste, um den Schüler für immer „satt" zu machen! Nichts schlimmer, als wenn der Schüler sagt: „Es ist genug — ich habe satt". Wer also den entwickelnden Unterricht als zu zeitraubend

Digitized by Google

beiseite stellen will, mag es thun; aber man mag sich dann auch nicht über die Ansicht wundern, daß es unter solchen Verhältnissen überhaupt besser wäre, die Schule zu schließen, denn wenn der Geist durch Kenntnisse nicht gebildet wird, dann sind Kenntnisse nichts nütze. Und wenn die Bildungskraft des Schülers nicht gestählt wird, da ist der Unterricht verkehrt. Vor dieser Verkehrtheit bewahrt die entwickelnde Methode aufs gründlichste.

Beim geometrischen Unterrichte der Volksschule soll aber nicht allein die Geistesbildung, sondern auch die Anwendbarkeit in der Perspektive stehen. Wir kommen damit zum dritten Punkte unserer Betrachtung:

3. Der geometrische Unterricht soll praktisch sein. Nicht alles, was anschaulich zu machen ist, ist darum auch geistbildend, und nicht alles, was geistbildend ist, ist darum auch anwendbar. Die Anwendbarkeit ist eine Forderung, der wir uns auf dem Gebiete des geometrischen Unterrichtes, teils im Interesse der Sache, teils im Interesse der Schüler, unmöglich entziehen dürfen.

Um die Forderung der praktischen Anwendbarkeit zu begründen, müssen wir den zum Eingange unserer Vorrede erwähnten Unterschied zwischen der formalen und materialen Bildung nochmals in Erwägung ziehen. In höheren Schulen wird der geometrische Unterricht streng wissenschaftlich erteilt und das Hauptaugenmerk auf strenge Konsequenz im geometrischen Fortschritte, auf Bündigkeit und Folgerichtigkeit der Beweise und auf Schärfe der Schlüsse gerichtet. In der exklusiven Verfolgung dieser Ziele sucht man die formale Bildung zu erreichen. In niederen Schulen sieht man von den obigen Zielen meist ganz ab, und nur das Nützlichkeitsprinzip steht im Vordergrunde. „Das Nützliche ist gut, und das Gute ist nützlich." So stehen sich also zwei Prinzipien diametral gegenüber: — dort das formale Prinzip ohne alle praktische Anwendung, hier das materiale Prinzip ohne alle Rücksicht auf formale Bildung. Es leuchtet ein, daß jede einseitige Verfolgung des einen oder des anderen Prinzipes der Sache und der Schule schadet und daß die Wahrheit, wie in tausend Fällen, so auch hier, in der Mitte liegt. Denn das formale Prinzip, in seiner Einseitigkeit aufgefaßt, führt zu Abstraktionen und Düfteleien, die dem gesunden Sinne des Volkes ganz fern liegen, und das nüchterne Nützlichkeitsprinzip führt zu einem geistlosen Mechanismus und zu einem Schablonenwesen, das mit Recht als der ärgste Feind gesunder Volksbildung und wahrer Aufklärung bezeichnet wird. Es leuchtet aber auch ein, daß der rechte Unterricht beim formalen Zwecke den materialen nicht ausschließt, sondern einschließt,

Digitized by Google

so daß also der Unterricht einerseits weder maschinenmäßig und ohne Einsicht betrieben werden darf, anderseits sich aber auch nicht in syllogistische Spitzfindigkeiten und euklidische Subtilitäten, also nicht in Regionen versteigen darf, in denen die Schneeluft eiskalter Begriffe gesundes, fröhliches Leben unmöglich macht. Der rechte Unterricht bildet das Urteilsvermögen und den Scharfsinn der Schüler, aber er berücksichtigt auch das praktische Leben mit seinen Forderungen. Vor einer Theorie, welche dem Schüler eine Masse unverstandener Begriffe, die er im Leben nie zur Anwendung bringen kann, gedächtnismäßig einpaukt und eintrichtert, behüte uns Gott in Gnaden, aber vor einer Praxis, die dem Schüler das redliche Nachdenken und den eisernen Fleiß erspart, nicht minder. Also keines ohne das andere! Durch alles aber das eine: Menschenbildung.

Aus dem Bisherigen folgt also, daß formaler und materialer Unterrichtszweck organisch verbunden sein müssen und daß neben der klaren Erkenntnis der geometrischen Wahrheiten die praktische Anwendung des klar Erkannten nicht fehlen darf. Ließe man die praktische Anwendung — die Übung — fehlen, dann würde man einem Sprachlehrer gleichen, der seinem Schüler eine fremde Sprache lediglich und allein dadurch beizubringen hoffte, daß er ihn eine Menge grammatischer Regeln auswendig lernen ließe. Ein solcher Lehrer würde bald finden, daß seine Schüler diese grammatischen Regeln sämtlich „wissen" können, trotzdem aber nicht im stande sind, die betreffende Sprache zu sprechen und zu schreiben. Das Sprechen lernt man nur durch Übung im Sprechen, und das Schreiben nur durch Übung im Schreiben, — die Übung ist also nach der Erkenntnis das Notwendigste; Erkenntnis ohne Übung ist wie ein Haus ohne Fundament. Wie auf dem Gebiete der Sprache, so muß darum auch beim geometrischen Unterrichte die Übung, die Anwendung des klar Erkannten nachdrücklich betont werden; nicht allein deshalb, weil dadurch der Schüler den Wert der Geometrie erst schätzen lernt und dadurch die Frage des Schülers: „Wozu soll ich das trockene Zeug lernen?" wegfällig wird; — nicht allein deshalb, weil das Volk gesunde Praxis, Hausmannskost, verlangt und von der table d'hôte der hohen Theorie nichts wissen will: — sondern vor allem deshalb, weil durch die Anwendung des für richtig Erkannten die Erkenntnis des Schülers geläutert, seine Einsicht wesentlich gefördert und durch die Befestigung klarer Begriffe der Verstand gebildet wird.

Man darf sich freilich nicht damit begnügen, daß man dem Schüler die Anwendung zeigt, so daß er nun zufrieden ist, wenn er sie

Digitized by Google

kennt: es ist vor allem erforderlich, daß der Schüler selbst die Anwendung macht. „Vom Kennen zum Können!“ Es ist z. B. nicht genug, daß der Schüler die Richtigkeit eines Lehrsatzes sieht und einsieht, er muß auch veranlaßt werden, die Folgerungen daraus zu suchen, gestellte Aufgaben zu lösen und die praktische Anwendung des Lehrsatzes selbstthätig und selbständig auszuführen. Es ist darum von Wichtigkeit, daß der Schüler recht oft Aufgaben zur Lösung bekomme und daß er auf dem Wege der Konstruktion mit Lineal und Zirkel gleichsam die Probe auf die Richtigkeit des Lehrsatzes mache, daß er Berechnungen vornehme, daß er sich Papierflächen zerschneide und in experimenteller Weise wieder zusammensetze, daß er sich seine geometrischen Körper aus Draht oder Pappe ꝛc. selbst fertige, daß er überhaupt durch Selbstthätigkeit zur praktischen Anwendung des für wahr Erkannten gelange. Fallen auch die selbstgefertigten Apparate ꝛc. nicht gerade sehr glänzend aus: es ist und bleibt doch eine Thatsache, daß dem Jungen der schmucklose Soldatenhut, den er sich aus Papier gefertigt hat, tausendmal lieber ist, als die glänzendste Arbeit des Buchbinders. Was man selbst thut, macht Freude; was man selbst geschaffen hat, ist einem wert.

Aber es ist nicht allein notwendig, daß der Schüler in der Schule und auf dem Papiere seine Selbstthätigkeit übe, sondern es ist auch von ganz besonderem Werte, daß er seine geometrischen Kenntnisse für die Industrie und den Ackerbau anwenden lerne und daß er demzufolge Messungen und Berechnungen in Haus und Hof, in Feld und Wald vornehme, wie sie später das Leben von ihm verlangt. Eine einzige Stunde im Freien ist oft mehr wert, als zehn Stunden in der Schule; denn dort lernt der Schüler durch die Übung erkennen, daß die Geometrie nicht allein eine Wissenschaft, sondern auch eine Kunst ist.

So muß also der Schüler von verschiedenen Seiten her veranlaßt werden, seine Selbstthätigkeit zu üben, das klar Erkannte praktisch zu gestalten und vom geometrischen Wissen zum geometrischen Können aufzusteigen. Bezugs dieses geometrischen Könnens aber sagt Seeger in seinem Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie ganz treffend: „Das geometrische Wissen ist die Bedingung des geometrischen Könnens, aber es ist nicht die Hauptsache, nicht der letzte Zweck. Das System von Lehrsätzen verhält sich zu den geometrischen Aufgaben in gewisser Weise, wie die Grammatik zum deutschen Aufsatze. Nach dem Interesse, das der Schüler der Aufgabe zuwendet, hat man den Erfolg des geometrischen Unterrichtes zu beurteilen und an der Ge-

Digitized by Google

wandtheit, mit der jene eine vorgelegte Arbeit zu behandeln verstehen, den Grad ihrer geometrischen Bildung abzumessen." Kennen und Können: das sind die beiden Pole, um die sich der Unterricht drehen muß. —

Ich hoffe, daß nach diesen Erörterungen der Ausdruck „praktisch" nicht mißverstanden wird.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so ergiebt sich ein Dreifaches: 1) Unterrichte anschaulich, — hüte dich vor Abstraktionen; 2) unterrichte entwickelnd, gieb dem Schüler die Wahrheit nicht als etwas Fertiges, sondern leite ihn an, sie mit Erfolg selbst zu suchen; 3) unterrichte praktisch, — vergiß über dem Geistbildenden das Anwendbare und die wirkliche Anwendung nicht. Also Anschauung — Arbeit — Interesse: diese drei Grundpfeiler alles rationellen Unterrichtes sind auch die Grundlagen des geometrischen Unterrichtes. Ohne sie läßt sich nichts leisten, mit ihnen alles. Als Warnung mag aber hier noch die Bemerkung stehen, daß es mit diesen drei pädagogischen Prinzipien wie mit dem Bündel von Pfeilen geht, die nur in ihrer Verbindung Großes leisten, einzeln aber zerbrechlich und ohnmächtig sind. Jene drei Prinzipien müssen darum durchaus vor Zersplitterung bewahrt bleiben, sie müssen eine Einheit bilden, sie müssen sich gegenseitig und in und mit dieser Gegenseitigkeit auch den Lehrstoff durchdringen, so daß man gar nicht sagen kann, wo die Arbeit anfängt und wo die Anschauung aufhört. Keines ohne das andere — alles aber in einem und in dem einen alles!

Dies sind die Grundsätze, auf welche der nachfolgende Lehrgang gegründet ist und nach denen ich ihn zu beurteilen bitte.

Vor Aufstellung desselben habe ich es mir angelegen sein lassen, die Litteratur des betreffenden Gegenstandes gründlich zu studieren. Teils die älteren Werke eines Joseph Schmid, Wilhelm Türk, Graßmann, Harnisch, Pechner, Zeller, Scharpf, Nostiz — teils die neueren von Diesterweg, Franz, Seeger, Lübsen, Fresenius, sowie Schliebens Feldmeßkunst (Quedlinburg und Leipzig, bei Ernst), Fleischhauers Praktischer Geometer (Langensalza, Greßler), Burgheims Geometrie in ihrer Anwendung auf die Gewerbe der Bauhandwerker (Bad Oynhausen, Eßmann & Comp.) u. m. a. sind mir vielfach Wegweiser und Führer gewesen und bei Bearbeitung der ersten Auflage benutzt worden. Was davon in der vorliegenden zweiten und vollständig umgearbeiteten Auflage übrig geblieben ist, überlasse ich der Beurteilung des geneigten Lesers. Man wird mir wenigstens das Zeugnis nicht verweigern

Digitized by Google

können, daß ich ernstlich bemüht gewesen bin, bei Bearbeitung der vorliegenden zweiten Auflage Fremdes auszuscheiden, Überflüssiges zu streichen, Lückenhaftes auszufüllen, Unvollständiges zu ergänzen, überhaupt das Ganze in einer Weise umzuarbeiten, daß es dem Zwecke einer guten Schule und den Forderungen der Neuzeit mehr und mehr entspricht.

Das Buch ist zunächst für eine mit einer Fortbildungsschule verbundene Volksschule geschrieben und bildet darum bezugs des Lehrganges — abweichend vom Wesen des propädeutischen Unterrichtes — ein organisches Ganze. Die Volksschule legt den Grund, die Fortbildungsschule baut auf diesem Grunde weiter fort und das Leben vollendet, was die Schule angefangen und vorbereitet hat. Damit ist selbstverständlich nicht ausgeschlossen, daß das Buch nicht auch in anderen Schulen benutzt werden könnte; insbesondere hoffe ich, daß es in Seminarpräparandenanstalten — wie dies mit der ersten Auflage schon vielfach geschehen — freundliche Aufnahme finden wird. Je nachdem es in der einen oder in der anderen Schule angewendet wird, je nachdem wähle der Lehrer, dem Bildungsgrade der Schüler und den Bedürfnissen seiner Schule gemäß, den Stoff aus. — Der Gedanke, daß alles, was zwischen den beiden Deckeln dieses Buches steht, in *einem* Jahre und in *einer* Anstalt durchgenommen werden soll, liegt mir ebenso fern, als der andere, daß es *nur* so und *nicht* anders, als ich es dargestellt habe, durchgenommen werden dürfte. Wie wenig ich das beabsichtigt habe, geht daraus hervor, daß ich — um Raum zu ersparen — nicht alles in der entwickelnden Lehrform dargestellt habe, sondern in den betreffenden Fällen es dem Lehrer überlasse, sich den Lehrstoff nach *eigenem* Ermessen zu formen. Ich beabsichtige ja überhaupt nicht, dem Lehrer die Zwangsjacke einer objektiven Methode anzulegen, sondern ich wünsche, daß der Lehrer *Herr* der Methode werde, so daß sie sich *in* ihm und *aus* ihm gestalte als das Ergebnis *seines* Geistes und *seines* Denkens. Dazu will meine Arbeit Veranlassung und Anregung geben. Mag's dann auch wenig oder viel sein, was der Lehrer in seiner Schule den Schülern bietet: wenn er nur im kleinsten Punkte die größte Kraft konzentriert, wenn er nur durch alles das eine, Menschenbildung, zu erreichen sucht und über dem „Geistbildenden" die „Anwendbarkeit" nicht vergißt; er wird dann auch mit wenigem viel leisten und die Schüler mit dem erfüllen, was das Beste alles Unterrichtes ist: mit Interesse und Begeisterung.

Wissenschaftliche Ansprüche im gewöhnlichen Sinne des Wortes macht das Buch *nicht*, es vertritt nur die pädagogische Seite des

Digitized by Google

ersten geometrischen Unterrichtes und wird darum vor allem auch nur von Pädagogen in rechter Weise gewürdigt werden. Beseelt von dem aufrichtigen Wunsche, den Volksschulunterricht zu fördern, werde ich jede belehrende Kritik, enthalte dieselbe freundlichen Rat oder wohlmeinenden Tadel, mit aufrichtiger Dankbarkeit entgegennehmen.

Kehr.

Vorrede zur siebenten (neu bearbeiteten) Auflage.

Vom Herrn Verleger aufgefordert, die Neubearbeitung einer 7. Auflage der Kehrschen praktischen Geometrie zu übernehmen, glaubte ich bei meiner Hochachtung und Verehrung für den heimgegangenen, gottbegnadeten Schulmann, (unter dessen Direktion ich am Erfurter Seminar als Lehrer der Mathematik wirken durfte,) den ehrenvollen Auftrag nicht zurückweisen zu dürfen. Möge es mir gelungen sein, bei meiner Bearbeitung das Richtige getroffen zu haben, so daß das Buch den heutigen Ansprüchen gerecht werde. — Während es zuerst meine Absicht war, nur notwendige sachliche und formelle Berichtigungen und einzelne Kürzungen vorzunehmen, drängten sich mir nach der Durcharbeitung der ersten Kapitel doch größere Umänderungen auf. So glaubte ich besonders vom dritten Abschnitt an, der mit den geradlinigen Figuren beginnt, den Gang derart anders gestalten zu müssen, daß der zu behandelnde Stoff im vorangehenden stets seine Vorbereitung findet und nicht der sicheren Grundlage entbehrt. Dies hielt ich besonders bezüglich derjenigen Schulen für nötig, die dem Geometrie-Unterricht mehr Raum gewähren und daher den ganzen Stoff des Buches verarbeiten können. Der Flächenberechnung geht daher jetzt die Betrachtung der geradlinigen Figuren nach ihren wichtigsten Eigenschaften voraus; das Verständnis für die Gesetze über Vier- und Vielecke wird durch die vorangegangene Behandlung der Dreiecke ermöglicht. Die Lehre von der Kongruenz, die Grundlage für so viele Kapitel in der Geometrie, ist vom Ende an den Anfang und umgekehrt der Pythagoreische Lehrsatz mehr an das Ende gesetzt worden. In der Stereometrie habe ich das Kapitel von den regelmäßigen Körpern erst der Behandlung der prismatischen und pyramidenförmigen, (in der es seine Vorbereitung findet,) folgen lassen und mit der Besprechung des regelmäßigsten Körpers, der Kugel, vereinigt.

Einzelne Stoffe glaubte ich ganz weglassen zu dürfen, so die ausführliche Behandlung der alten Maße und ihre Vergleichung mit den

Digitized by Google

neuen, sowie die Hervorhebung der Vorzüge unserer decimalen Währungszahlen; sodann einzelne weniger wichtige Aufgaben, wie die Konstruktion von gleichseitigen Dreiecken und Quadraten in- und umeinander, die ohne Begründung keinen Wert haben. Eine klare und ausreichende Behandlung der Quadrat- und Kubikwurzel erschien mir für ein Lehrbuch der Geometrie zu umfangreich und auch in den methodischen Rechenwerken schon hinreichend vertreten.

Dafür sind andererseits einzelne Stoffe, besonders in der Stereometrie, eingehender behandelt worden. Jedem einzelnen Paragraphen habe ich „zusammenfassende Fragen und Aufgaben" folgen lassen, die zur Einübung und Anwendung des in der Lehrstunde veranschaulichten und entwickelten Lehrstoffes, sowie teilweise bei späteren Wiederholungen dienen mögen. Den Lehrstoff der umfangreicheren Paragraphen habe ich durch Gliederung in einzelne Abschnitte übersichtlich zu machen gesucht, und zwar sind die Dispositionspunkte entweder den einzelnen Abschnitten gleich vorangestellt, oder aus den „zusammenfassenden Fragen" zu ersehen. — Bei allen Änderungen im Einzelnen jedoch habe ich mich bemüht, die auf dem Titelblatte angedeutete Tendenz des Buches streng zu wahren: Das anschauliche Moment ist stets in den Vordergrund gestellt worden; auf anschaulicher Grundlage sind sodann die Gesetze und Regeln entwickelt worden, ohne daß gerade die Frageform überall durchgeführt worden ist. Nur hier und da sind einzelne Abschnitte katechetisch dargestellt; aber immer ist das Gesetz oder die Definition erst aus der Betrachtung heraus entsprungen. — Die praktische Anwendbarkeit endlich ist durch die beigefügten Rechen- und Konstruktionsaufgaben erstrebt worden. — Neben der ausgeprägt praktischen Seite habe ich gesucht, auch die formalbildende Seite des geometrischen Unterrichts genügend zu betonen, um dadurch besonders den gehobeneren Schulen Rechnung zu tragen. Der Veranschaulichung folgt deshalb in den meisten Fällen eine einfache logische Begründung, jedoch ohne die wissenschaftlich-mathematische Form. Wo der Lehrer die kurze, präzise Beweisführung als Zusammenfassung seiner Entwicklung vom Schüler für nötig erachten sollte (etwa in Mittelschulen und Präparandenanstalten), läßt sich diese ja leicht anschließen. Eine mustergültige Darstellung derselben enthält u. a. z. B. Kamblys Planimetrie, die vielen Lehrern vom Seminarunterricht her bekannt ist.

Der Lehrer wird selbst am besten beurteilen können, was unter den obwaltenden Verhältnissen seiner Schule frommt, und danach aus dem hier gebotenen Stoffe sich einen Plan aufstellen können. In den einfachsten Schulverhältnissen wird er sich meist mit der rein anschaulichen

Digitized by Google

Behandlung begnügen und auch nur die leichteren und zugleich fürs praktische Leben wichtigen Sätze und Aufgaben behandeln. Auch selbst bei den gehobeneren Schulen sind manche Partieen, besonders die eingeklammerten, nur den geförderteren Schülern zuzumuten. Ich halte es aber für überflüssig und auch für unmöglich, den einzelnen Kollegen die wichtigeren und weniger wichtigen Abschnitte für die verschiedenen Schulverhältnisse genau zu bezeichnen. —

Möge es mir gelungen sein, dem Buche durch die Neubearbeitung die vielen alten Freunde erhalten und neue Freunde gewonnen zu haben.

Liegnitz, im März 1891.

B. Saro,
Seminarlehrer.

Berichtigungen.

S. 6, § 7, Z. 2: lies statt „seine" dieselbe.
S. 6, § 8, Z. 2: lies statt „seine" die.
S. 16, Z. 5 v. unten: füge zwischen „a c" ein und ein.
S. 27, Z. 2 ist das Wort „wirklich" auszulassen.
S. 56, Z. 11 v. unten: lies statt des „A" ein B.
S. 64, Z. 4: lies statt „1 qm" 1 qmm.
S. 89, § 47 I, Z. 5: lies statt „9,5" 9 cm, 5 cm.
S. 114: lies statt „Fig. 141" Fig. 161.
S. 148, Aufg. 4: lies die Worte „von der Fläche des größten Kugelkreises" gleich nach dem Worte „das Wievielfache".

Digitized by Google

Übersicht des Inhaltes.

Seite

Vorwort (Methodische Winke für den Lehrer) III

Einleitung.

§ 1. Der Begriff der Geometrie 1
§ 2. Der geometrische Körper und seine Ausdehnungen 2
§ 3. Die Fläche und ihre Ausdehnungen 3
§ 4. Die Linie und ihre Ausdehnung 3
§ 5. Der Punkt 4
§ 6. Zusammenstellung und Einteilung 4

I.

Die Lehre von den Linien und Flächen in einer Ebene.

(Die Planimetrie.)

Erster Abschnitt.

Von den Linien.

§ 7. Entstehung und Arten der Linien 6

Kapitel 1.

Von den geraden Linien.

§ 8. Die geraden Linien, nach Begriff und Richtung 6
§ 9. Von den geraden Linien in einerlei Ebene, nach ihrer Lage zu einander 8
§ 10. Die geraden Linien nach ihrer Länge. (Das Messen der geraden Linien.) 10
§ 11. Das Messen gerader Linien auf dem Felde. (Gebrauch der Meßkette.) 11
§ 12. Das Messen schiefer Linien auf dem Felde. (Nivellieren.) 14
§ 13. Von dem Aufzeichnen gemessener Linien. (Der verjüngte Maßstab.) . 17

Kapitel 2.

Von den krummen Linien.

§ 14. Die Kreislinie 20
§ 15. Das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser 22
§ 16. Von anderen krummen Linien 23

Zweiter Abschnitt.

Kapitel 3.

Von den Winkeln.

§ 17. Entstehung, Wesen und Bezeichnung der Winkel 27
§ 18. Größe und Arten der Winkel 27

Digitized by Google

Seite

§ 19. Der Transporteur und seine Anwendung zum Messen der Winkel . . 29
§ 20. Weitere Anwendung des Transporteurs zu verschiedenen Winkelkonstruktionen 31
§ 21. Verschiedene Winkelkonstruktionen ohne Transporteur 32
§ 22. Vom Messen der Winkel auf dem Felde 33
§ 23. Winkelgruppen an einem gemeinsamen Scheitelpunkte 34
§ 24. Winkel an durchschnittenen Parallelen 36

Dritter Abschnitt.

Von den geradlinigen Figuren.

§ 25. Allgemeines über die Flächen 37

Kapitel 4.

Das Dreieck nach seinen wichtigsten Eigenschaften.

§ 26. Allgemeines vom Dreieck 39
§ 27. Die Winkelsumme im Dreieck 39
§ 28. Der Außenwinkel am Dreieck 40
§ 29. Das Dreieck nach seinen Seiten 41
§ 30. Von den verschiedenen Graden der Übereinstimmung geradliniger Figuren. (Gleichheit, Ähnlichkeit, Kongruenz.) 42
§ 31. Die Kongruenz der Dreiecke 43
§ 32. Die Beziehung zwischen Seiten und Winkeln im gleichschenkligen Dreieck 49
§ 33. Lage der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks zur Basis 51
§ 34. Zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinschaftlicher Basis und Konstruktionsaufgaben, welche darauf beruhen 52
§ 35. Beziehung zwischen Seiten und Winkeln im ungleichseitigen Dreieck . 53

Kapitel 5.

Die Vierecke und Vielecke nach ihren wichtigsten Eigenschaften.

§ 36. Die Arten der Vierecke 54
§ 37. Die wichtigsten Gesetze, die für alle Parallelogramme gelten 55
§ 38. Besondere Gesetze für die rechtwinkligen und für die gleichseitigen Parallelogramme 57
§ 39. Vom Trapez 58
§ 40. Von den Vielecken 59
§ 41. Konstruktion regelmäßiger Vielecke 62

Kapitel 6.

Von der Flächenausmessung oder Flächenberechnung und der Gleichheit geradliniger Figuren.

§ 42. Flächenmaße 63
§ 43. Flächenberechnung des Quadrats 65
§ 44. Flächenberechnung des Rechtecks 66
§ 45. Flächenberechnung des schiefwinkligen Parallelogramms 66
§ 46. Flächenberechnung des Dreiecks 67
§ 47. Flächenberechnung des Trapezes 69
§ 48. Flächenberechnung des Trapezoides und der unregelmäßigen Vielecke . 71
§ 49. Flächenberechnung der regelmäßigen Vielecke 72
§ 50. Beziehung zwischen Umfang und Flächeninhalt der Figuren 73
§ 51. Einige leichtere Aufgaben über Verwandlung und Teilung verschiedener Figuren 74

Kapitel 7.

Der Pythagoreische Lehrsatz.

§ 52. Entwickelung des Pythagoreischen Lehrsatzes 77
§ 53. Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes zu einzelnen Konstruktionsaufgaben 81

Digitized by Google

Seite

§ 54. Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes zu geometrischen Rechenaufgaben über das rechtwinklige Dreieck 83
§ 55. Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes zur Berechnung des gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecks 83

Kapitel 8.

Von der Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

§ 56. Die Ähnlichkeit der Figuren im allgemeinen und der Dreiecke im besonderen 85
§ 57. Flächenverhältnis ähnlicher Figuren 87
§ 58. Konstruktionsaufgaben auf Grund der Ähnlichkeit 88
§ 59. Anwendung der Ähnlichkeitssätze zu Messungen im Freien 89

Vierter Abschnitt.

Von den krummlinigen Figuren.

Kapitel 9.

Der Kreis.

§ 60. Allgemeine Erklärungen über den Kreis 92
§ 61. Lage des Kreismittelpunktes zu den Sehnen 94
§ 62. Gesetze über Winkel im Kreise 95
§ 63. Über Tangenten am Kreise 97
§ 64. Reguläre Polygone im Kreise 99
§ 65. Flächenberechnung des Kreises 101
§ 66. Verhältnis zweier Kreise zu einander 102
§ 67. Berechnung einzelner Teile der Kreisfläche 103

Kapitel 10.

Andere krummlinige Figuren außer dem Kreise.

§ 68. Die Ellipse nach ihren wichtigsten Eigenschaften 105
§ 69. Konstruktionsaufgaben über die Ellipse 107
§ 70. Berechnung der Ellipse 109
§ 71. Von der Ausmessung unregelmäßiger krumm- und gemischtliniger Figuren 109

II.

Die Lehre von den Körpern.

(Die Stereometrie.)

Fünfter Abschnitt.

Die geometrisch meßbaren Körper.

Kapitel 11.

Grundbegriffe für die Stereometrie.

§ 72. Wesen der Stereometrie 112
§ 73. Von der Lage der Geraden und Ebenen im Raume 113

Kapitel 12.

Körper mit durchgehends gleicher Dicke (prismatische Körper).

§ 74. Beschreibung des Würfels 116
§ 75. Die Körper- oder Kubikmaße 117

Digitized by Google

Seite

§ 76. Berechnung des Würfels 119
§ 77. Beschreibung der Prismen oder der kantigen (eckigen) Säulen . . . 120
§ 78. Berechnung der Prismen 122
§ 79. Beschreibung des Cylinders oder der Walze oder Rundsäule 123
§ 80. Berechnung des Cylinders 125

Kapitel 13.

Körper mit nach oben abnehmender Dicke. (Pyramidenartige Körper.)

§ 81. Beschreibung der Pyramide oder Spitzsäule 127
§ 82. Berechnung der Pyramide 128
§ 83. Beschreibung des Kegels oder der runden Spitzsäule 130
§ 84. Berechnungen am Kegel 132
§ 85. Beschreibung der abgestumpften Pyramide oder des Pyramidenstumpfes 134
§ 86. Berechnung des Pyramidenstumpfes 135
§ 87. Beschreibung des abgestumpften Kegels oder des Kegelstumpfes . . . 137
§ 88. Berechnungen am Kegelstumpf 138
§ 89. Berechnung von tonnenartigen Gefäßen 140

Kapitel 14.

Die regelmäßigen (regulären) Körper.

§ 90. Beschreibung der ebenflächigen regelmäßigen Körper oder Flache. (Reguläre Polyeder.) 140
§ 91. Berechnung der reg. Körper oder Flache 144
§ 92. Beschreibung des krummflächigen regelmäßigen Körpers oder der Kugel 145
§ 93. Berechnung der Kugeloberfläche 147
§ 94. Berechnung des Kugelinhalts 148
§ 95. Einige schwierigere Berechnungen an der Kugel 149

Sechster Abschnitt.

Die geometrisch unmeßbaren Körper.

Kapitel 15.

§ 96. Die indirekte Messung der geometrisch unmeßbaren Körper 151

Digitized by Google

Einleitung.

§ 1. Der Begriff der Geometrie.

Die Gegenstände, welche uns umgeben, — sowohl die in der Natur entstandenen, als auch die von Menschenhand verfertigten — nennen wir *Körper*. Nenne Körper, welche sich in dieser Stube — im Felde — im Wasser — am Himmel ꝛc. befinden! An den genannten Körpern können wir nun verschiedene *Eigenschaften* unterscheiden, z. B. die Eigenschaft der *Schwere*. Nenne Körper, welche leichter sind als Eisen, schwerer als Luft! Sodann die Eigenschaft der *Farbe*! Die Farbe ist oft bedingt von dem *Stoffe*, aus welchem der Körper besteht. Das Gold ist z. B. stets gelb, das Silber stets weiß, das Eisen stets grau ꝛc. Zu den genannten Eigenschaften der Körper könnten wir noch mehrere hinzufügen, doch mag es bei den genannten sein Bewenden haben.

Sämtliche Eigenschaften der Körper sind nun *zweifacher Art*: es sind entweder solche Eigenschaften, welche *allen* Körpern *ohne* Ausnahme zukommen (wesentliche oder allgemeine Eigenschaften), oder es sind solche, welche *nicht* bei allen Körpern vorkommen (besondere Eigenschaften). Nicht alle Körper sind wie die Rose riechbar, nicht alle wie der Zucker oder das Salz durch den Sinn des Geschmackes zu bestimmen (Gold, Glas). Zu den Eigenschaften nun, die allen Körpern *ohne* Ausnahme zukommen, gehört 1) die Eigenschaft der *Form* oder *Gestalt*, denn in irgend*einer* Form erscheint uns jeder Körper, und wenn wir von „formlosen" Körpern reden, so meinen wir damit nur, daß der betreffende Körper keine *regelmäßige* Form habe; 2) die Eigenschaft der *Größe*, denn auch der kleinste Körper, der mit dem besten Vergrößerungsglase kaum zu erkennen ist, hat seine bestimmte Größe. Diejenige Wissenschaft nun, welche die Körper (nicht nach ihrer Farbe, Schwere ꝛc., sondern nur) nach ihrer Form und *Größe* betrachtet, ist die Geometrie. *Die Geometrie ist also diejenige Wissenschaft, welche die Körper in Hinsicht auf ihre Form und Größe betrachtet.* Dem Geometer ist es darum auch gleichgültig, ob der Stein, den er ausmessen soll, Granit oder Porphyr ist, ob der Acker, dessen Form und Größe er zu bestimmen hat, Thon- oder Kiesboden hat; er fragt nur: Welche Form hat er? Wie groß ist er?

Digitized by Google

§ 2. Der geometrische Körper und seine Ausdehnungen.

Man unterscheidet je nach den Eigenschaften, welche wir an den Körpern betrachten, sinnfällige (in die Sinne fallende) und geometrische Körper. Ein sinnfälliger (oder physischer) Körper ist ein solcher, bei welchem man außer seiner Gestalt und Größe auch noch seinen Stoff und die Eigenschaften desselben, wie Farbe, Schwere ꝛc., in Betracht zieht. Ein geometrischer Körper ist dagegen ein solcher, bei welchem man davon ganz absieht und nur an seine Form und Größe denkt. Dieser Ofen hier ist ein sinnfälliger Körper. Denke dir nun den Stoff und die Farbe ꝛc. des Ofens hinweg, dann bleibt dir nur noch die Vorstellung von dessen Gestalt und Größe übrig, und wenn du die Augen schließest, dann kannst du wohl sogar den Ofen in die Luft zeichnen. Wenn du das thust, dann hast du einen geometrischen Körper dargestellt. Warum ist dies kein sinnfälliger, physischer Körper? Warum ein geometrischer? Wie unterscheiden sich beide von einander?

Um zu dem Begriffe eines geometrischen Körpers zu gelangen, wollen wir noch eine andere Betrachtung anstellen. Ihr habt schon oft den Ausdruck Raum nennen hören. (Den Kindern ist der Ausdruck auch in den Ableitungen: räumlich, geräumig, auf- und einräumen bekannt.) Zwischen den Mauern der Kirche ist z. B. der innere Raum derselben. Was versteht ihr unter Kellerraum? Bodenraum? Was heißt das: die Stube ist geräumig, jene nicht? Wie ist das Feld, wenn es im Herbste geräumt ist? Wie ist der Tisch, wenn die Mutter aufgeräumt hat? ꝛc. Wenn du einen Tisch in die Stube stellst, so steht er im Raume der Stube. Die Stube dagegen befindet sich im Raume des Hauses. Das Haus steht auf dem Erdenraume, und die Erde bewegt sich im Weltenraume. Also alle Körper befinden sich im Raume, und wenn wir uns alles wegdenken (zuerst das Haus — dann unsere Stadt — unsere Flur — dann die umliegenden Dörfer — dann unser Land — Deutschland — alle Erdteile — das Meer — die ganze Erde — die ganze Welt), dann bleibt uns noch der Raum übrig, in welchem all' diese Körper gestanden haben. Der Raum ist also überall, wir können nicht sagen, wo er anfängt, nicht, wo er aufhört; er ist unbegrenzt, unendlich.

Denken wir uns nun einen Teil dieses leeren Raumes (z. B. den Raum des Schulzimmers) von allen Seiten begrenzt (Decke, Wände, Fußboden), so erhalten wir einen geometrischen Körper. Ein geometrischer Körper ist also ein allseitig begrenzter Raum.

Ein geometrischer Körper existiert nun in der Wirklichkeit nicht, sondern wir können uns ihn nur denken. So ist z. B. dieser Würfel kein geometrischer Körper, sondern er steht nur an der Stelle desselben, er ist nur das Bild desselben.

Wir können den Raum des Schulzimmers von vorn nach hinten, von links nach rechts und von oben nach unten messen. Ein Körper

Digitized by Google

(der physische, wie der geometrische) hat also drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe.

Bem.: Die Bezeichnungen für die drei Ausdehnungen eines Körpers werden verschiedentlich gebraucht: Höhe eines Turmes, Tiefe eines Grabens, Dicke eines Buches; Tiefe eines Hauses in dem Sinne von Breite ꝛc.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist ein geometrischer Körper?
2. Worin nur stimmen der geometrische und der sinnfällige (physische) Körper überein?
3. Zeige und miß die drei Ausdehnungen an einzelnen Gegenständen des Schulzimmers (Ofen, Schrank, Tafel, Buch, Fensterscheibe) und an einzelnen Modellen geometrischer Körper (Würfel, Säule, Spitzsäule ꝛc.)!

§ 3. Die Fläche und ihre Ausdehnungen.

An einem Quadersteine ꝛc. kannst du nur das Äußere, die Flächen sehen. Die Flächen sind die Grenzen der Körper. Zeige mir die Flächen der Bank — des Tisches — der Wand! Von wieviel Flächen wird dieser Würfel begrenzt? Dieser Ofen? Ein Haus? Eine vierseitige Turmspitze?

Man kann sich zwar keine Fläche vorstellen, ohne zugleich an einen Körper zu denken, den sie begrenzt; allein die Fläche ist deshalb noch kein Teil des Körpers (nicht etwa eine Haut, eine Schale). Miß die Fläche des Fußbodens von links nach rechts, von vorn nach hinten! In welcher Richtung kannst du sie nicht messen? Flächen haben keine Dicke; geht man von der Fläche auch nur um das allergeringste nach dem Innern des Körpers zu, so ist man von außen, d. h. von der Fläche weg. Die dünnste Haut, das feinste Blatt Papier ist also keine Fläche, denn es hat eine Dicke, was man leicht ersehen kann, wenn man mehrere Blätter aufeinanderlegt. Die Fläche unterscheidet sich also von dem Körper dadurch, daß sie nicht drei, sondern zwei Ausdehnungen hat; denn sie hat keine Dicke, sondern nur Länge und Breite. Gewöhnlich nennt man die größere Ausdehnung „Länge", die kleinere „Breite".

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist eine Fläche?
2. Wieviel Ausdehnungen hat eine Fläche?
3. Wieviel Ausdehnungen bemerkt man an einem Ackerstück, einem Garten, einem Backstein, einem Blatt Papier? Welche von den genannten Raumgrößen sind demnach Flächen, welche Körper?
4. Gieb die Anzahl der Begrenzungsflächen von einer zugenagelten Kiste, einer Ackerwalze, einer Kugel an!

§ 4. Die Linie und ihre Ausdehnung.

Jede Fläche hat ihre Grenzen. Der Garten hat seinen Zaun, der Acker hat seine Furche ꝛc. Die Grenzen der Flächen sind Linien. Miß diese Kantenlinie des Würfels von links nach rechts! Ver-

Digitized by Google

suche es, sie auch von vorn nach hinten, von oben nach unten zu messen! Die Linie hat also nur eine Ausdehnung, gewöhnlich die Länge genannt; sie ist nicht etwa ein Teil der Fläche. Die Linien ziehen wir auf der Tafel gewöhnlich mit Kreide; doch sind dies, im strengsten Sinne des Wortes, keine geometrischen Linien, sondern es sind vielmehr Körper, weil ein solcher Kreidestrich nicht allein lang, sondern auch breit und dick ist. Als Bild einer Linie kann angesehen werden: ein Weg, eine Furche, ein Zaun ꝛc., sobald man von der Breite [und Höhe] absieht und nur an die Länge denkt.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist eine Linie?
2. Wie viel Ausdehnungen hat die Linie?
3. Zähle und vergleiche die Kantenlinien des Würfels nach ihrer Länge!

§ 5. Der Punkt.

Die Grenze der Linie ist der Punkt. Versuche diesen Eckpunkt des Würfels in verschiedener Ausdehnung zu messen! Der Punkt hat gar keine Ausdehnung.

Was wir gewöhnlich Punkt nennen, ist nur ein Bild oder die Bezeichnung des Punktes; denn da der Punkt keine Ausdehnung, folglich auch keine Teile hat, so ist er auch nicht sichtbar. Um aber die Stelle, an welcher der Punkt sein soll, hervorzuheben, bezeichnen wir dieselbe durch Berührung mit einem spitzigen Gegenstande, mit einer Nadel, einem feingespitzten Bleistifte ꝛc. Ein so bezeichneter Punkt heißt ein physischer Punkt, zum Unterschiede von dem bloß gedachten mathematischen Punkte. Auf dem Felde bezeichnet man die Punkte mit Meßpflöcken, Meßstäben, Meßstangen, Signalen, je nachdem man die Stelle, an welcher der Punkt gedacht werden soll, auf eine größere oder geringere Entfernung sichtbar machen will. Auch die Spitzen der Türme oder ähnliche hervorragende Gegenstände können zur Bezeichnung der Punkte benutzt werden.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist ein Punkt?
2. Wie viel Ausdehnungen hat der Punkt?
3. Gieb die Anzahl der Eckpunkte am Würfel, im Schulzimmer, an der vierseitigen Spitzsäule ꝛc. an!

§ 6. Zusammenstellung und Einteilung.

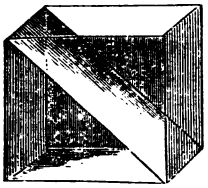
Setze die Spitze einer Nadel auf die Schiefertafel ein, so entsteht ein Punkt. Bewegt sich der Punkt (die Nadelspitze) fort, so entsteht eine Linie. Die Linie ist also die Bahn eines fortschreitenden Punktes. — Bewegt sich eine Linie nicht in ihrer eigenen Richtung fort, sondern nach einem dritten Punkte hin, der außerhalb ihrer Richtung liegt (z. B. der Draht, mit dem der Töpfer den Thon, — oder die Schneide des Messers, mit welchem die Hausfrau das Brot

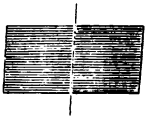
Digitized by Google

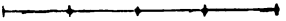
durchschneidet), so entsteht eine Fläche. Die Fläche ist also die Bahn einer nicht in ihrer Richtung fortschreitenden Linie. Was entsteht endlich, wenn ich eine Fläche in einer Richtung fortbewege, in der sie selbst keine Ausdehnung hat (ein Brettchen in weichen Thon drücke)? Der Körper entsteht also durch die fortschreitende Bewegung einer Fläche.

Daraus folgt zugleich, daß man die Körper durch Flächen (Fig. 1), die Flächen durch Linien (Fig. 2), die Linien durch Punkte (Fig. 3) teilen kann.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.







Sonach finden im Raume drei Ausdehnungen statt, nämlich:

1) die Ausdehnung als Linie nach einer Richtung: in die Länge;
2) die Ausdehnung als Fläche nach zwei Richtungen: in die Länge und Breite;
3) die Ausdehnung als Körper nach drei Richtungen: in die Länge, Breite und Dicke.

Erstere beiden Raumgrößen, Linien und Flächen, lassen sich in einer Ebene darstellen, dagegen die Körper nicht.

Es zerfällt demgemäß die Geometrie oder Raumlehre in zwei Hauptteile:

I. die Kenntnis und Messung der Raumgrößen (Linien und Flächen) in einer Ebene: die Planimetrie;
II. die Kenntnis und Messung der Körper: die Stereometrie.

Im Folgenden wollen wir nun aus diesen zwei Teilen das zum praktischen Bedarfe Notwendige und Wissenswerte, soweit es auf dem Wege der sinnlichen Anschauung und einfachen Schlußfolgerung mit Weglassung aller schwierigen geometrischen Beweisführungen zu ermöglichen ist, kennen zu lernen suchen.

Digitized by Google

I.

Die Lehre von den Linien und Flächen in einer Ebene.

(Die Planimetrie.)

Erſter Abſchnitt.

Von den Linien.

---

§ 7. Entſtehung und Arten der Linien.

Die Linie entſteht, wenn ein Punkt ſich fortbewegt. Die Bewegung des Punktes kann aber verſchiedener Art ſein: Er kann 1) ſeine Richtung immer beibehalten; dann bildet ſeine Bahn die gerade Linie. Oder er kann 2) fortſchreitend die Richtung ſeiner Bahn ſtets ändern; dann erzeugt er die krumme Linie.

Eine Zuſammenſetzung von mehreren geraden Linien (mit verſchiedener Richtung) ergiebt die gebrochene Linie; durch Zuſammenſtellung von geraden und krummen Linien entſteht die gemiſchte Linie.

Zuſammenfaſſende Fragen und Aufgaben.

1. Was ſind gerade, krumme, gebrochene, gemiſchte Linien?
2. Nenne Gegenſtände, an denen dieſe Linien vorkommen!
3. Zeichne die vier Arten der Linien!

Kapitel 1.

Von den geraden Linien.

§ 8. Die geraden Linien, nach Begriff und Richtung.

I. Weſen: Die gerade Linie entſteht, wie wir geſehen haben, wenn ein Punkt ſich fortbewegt, ohne ſeine Richtung zu ändern. Daraus ergiebt ſich zugleich eine wichtige Eigenſchaft der geraden Linie. Geſetzt,

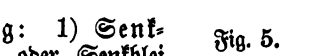
Digitized by Google

es führten zwei Wege von unserer Stadt nach dem nächsten Dorfe; der eine sei ganz gerade, der andere bilde einen Bogen. Zwei Personen gehen gleichzeitig von hier fort und behalten auf beiden Wegen immer dieselbe Geschwindigkeit bei: welche wird früher in jenem Dorfe eintreffen? Was für einen Weg muß diese gegangen sein? — Die gerade Linie (kurz: die Gerade) ist also der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten*). — Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

Auf das Papier zieht man gerade Linien mit Hilfe des Lineals und des Bleistiftes oder der Reißfeder. (Der Lehrer zeige hierbei zugleich den Schülern, woran man erkennt, ob das Lineal wirklich gerade ist oder nicht, indem er es umkehrt.) Die Zimmerleute ꝛc. bilden, wenn sie die zu behauenden Balken „schnippen" wollen, gerade Linien mit einer in Rötelwasser getauchten, oder mit Rötel bestrichenen Schnur, die an beiden Enden straff angezogen wird. Die Geometer brauchen auf dem Felde dazu die Meßschnur oder die Meßkette, deren Einrichtung und Anwendung wir später kennen lernen werden.

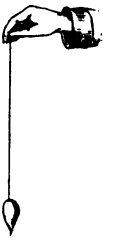
Die gezeichnete Linie benennt man mit zwei Buchstaben, die man an die Endpunkte setzt, AB in Fig. 4, oder mit einem kleinen Buchstaben, der etwa an die Mitte der Linie zu stehen kommt, Linie a in Fig. 4.

Fig. 4.



II. Arten bezüglich der Richtung: 1) Senkrechte Linien. Der Lehrer zeigt ein Lot oder Senkblei (Fig. 5) und läßt es beschreiben, läßt dieselbe Richtung an Gegenständen aufsuchen und an der Tafel zeichnen. Eine Linie, welche die Richtung des Lotes hat, heißt lotrecht oder senkrecht (vertikal, perpendikulär).

Fig. 5.



Welche Leute brauchen das Lot? Wozu? Wann steht ein Gebäude im Lot? Hat das Lot überall auf der ganzen Erde die senkrechte Richtung? Weshalb? Behalten lotrechte Linien, nach dem Mittelpunkt der Erde verlängert, immer gleichen Abstand von einander? Warum nicht?

2) Wagerechte Linien: Man weist auf die untere Kante der Wandtafel, auf den ruhenden Wasserspiegel in einem Glase und erinnert an den Wagebalken einer Wage, die sich im Gleichgewicht befindet, läßt die Richtung noch an anderen Gegenständen aufsuchen und an der Tafel zeichnen. Eine Linie, welche die Richtung des sich im Gleichgewicht befindlichen Wagebalkens oder des ruhenden Wasserspiegels (oder des Horizontes) hat, heißt wagerecht (horizontal). Ist auch die Oberfläche des Meeres horizontal? Kann man auf der Oberfläche der Erde eine längere wirklich horizontale Linie ziehen?

Wenn der Zimmermann sehen will, ob die Schwellen der Gebäude; der Maurer, ob die Quadersteine in der Mauer wagerecht liegen: so

*) Lübsen giebt in seiner Elementar-Geometrie die Definition einer geraden Linie so: „Eine gerade Linie ist diejenige, welche nicht aus ihrer Lage kommt, indem sie sich um ihre beiden festen Endpunkte dreht."

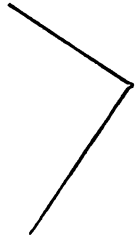
Digitized by Google

brauchen diese Handwerker dazu die Setzwage (Fig. 6), seltener die Wasserwage. Der Lehrer zeige eine Setzwage und ihre Anwendung. Wie ist die Setzwage beschaffen? Nach welcher Seite hin schlägt das Bleilot aus, wenn die Mauer nicht wagerecht ist? Was thut dann der Maurer? Nimm die Setzwage (— die Schüler können sich selbst eine verfertigen —) und siehe, ob dieser Tisch, jene Bank wagerecht stehen! —

Fig. 6.

3) Schräg heißt eine gerade Linie, wenn sie weder wagerecht, noch senkrecht ist, also zwischen beiden Richtungen liegt, z. B. ein Bergabhang, das Bett der Flüsse, das Gefäll des Wassers, die Dächer 2c. Die schrägen Linien können rechts oder links ab- oder aufsteigend sein.

Fig. 7.



Treffen eine wagerechte und eine senkrechte Linie in einem Punkte zusammen, so sagt man, diese steht senkrecht oder perpendikulär auf jener. (Perpendikel an der Uhr!)

Aber auch zwei an sich schiefe Linien, die so zu einander stehen wie die senkrechte zur wagerechten Linie (also rechtwinklig), werden als senkrecht aufeinanderstehende Linien bezeichnet. (Fig. 7.)

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie teilt man die geraden Linien nach ihrer Richtung ein?
2. Was sind senkrechte, wagerechte, schräge Linien?
3. Womit prüft man die senkrechten, womit die wagerechten Linien? Führe die Probe selbst an verschiedenen Gegenständen aus!
4. Bestimme die Richtung der Kantenlinien an den Stubenwänden, einer Wagendeichsel, einer angelehnten Leiter, eines ruhenden Pendels, der Dachsparren, der Klaviersaiten, eines Stabes, der in einem schief gehaltenen Wasserglase schwimmt, der Kegelkugel auf ihrem Hin- und Herwege 2c.!
5. Zeichne und benenne auf doppelte Weise mit Buchstaben die drei Arten der geraden Linien!

§ 9. Von den geraden Linien (in einerlei Ebene) nach ihrer Lage zu einander.

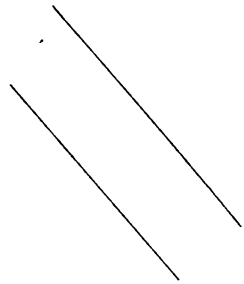
1. Gleichgerichtete Linien (Fig. 8): An mehreren Gedankenstrichen nach einem Satze, an den beiden entgegengesetzten Armen eines Wegweisers, an den Häusern in geradlinigen Straßen, an den fortlaufenden wagerechten Fensterbekleidungen mehrerer Fenster erkennen wir Linien, welche in einer Richtung liegen und verlängert eigentlich nur eine gerade Linie bilden. Zeichne solche Linien a) wagerecht, b) senkrecht, c) schräg!

Fig. 8.

2. Gleichlaufende oder parallele Linien: Die obere und untere Kante der Wandtafel gehen beide gleichmäßig von links nach rechts, haben gleiche Richtung, bilden aber nicht, wie vorige, eine Linie. Sie sind überall gleich weit von einander entfernt, und bei noch so weiter Verlängerung treffen sie doch nie zusammen. Solche Linien heißen

Digitized by Google

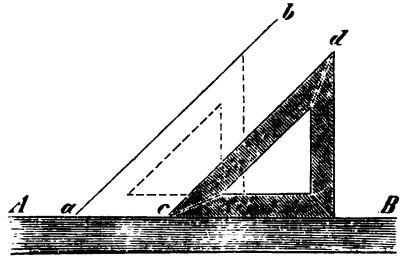
gleichlaufend oder parallel. Fig. 9. Fig. 10.



Parallellinien können (Fig. 9 und 10) senkrechte und auch schräge Linien sein. Parallellinien finden wir z. B. bei den Sprossen einer Leiter, bei den Saiten einer Guitarre, bei den Latten eines Daches, bei den Gräben oder Baumreihen einer Chaussee, bei den Schienen einer Eisenbahn ꝛc. So sind auch zwei Sonnenstrahlen, welche durch zwei feine Öffnungen des Fensterladens ins Zimmer fallen, alle Wetterfahnen, welche von demselben Winde gedreht sind, zwei ruhende Uhrpendel parallel.

Auf mechanische Weise pflegt man Parallellinien gewöhnlich mit Hilfe des sogenannten Winkelhakens zu ziehen, welcher aus einem ein rechtwinkliges Dreieck bildenden Rahmen besteht. Soll z. B. zu ab (Fig. 11) eine Parallele durch Punkt c gezogen werden, so legt man die eine Kante des Winkelhakens auf die Linie ab, so daß die untere Kante des Winkelhakens durch den Punkt c geht, und schiebt nun den Winkelhaken auf dem Lineale AB, das man an den Winkelhaken legt, fort bis zum Punkte c. — Noch leichter lassen sich Parallellinien auf ein Reißbrett zeichnen, wenn man dazu eine geeignete Reißschiene (mit Schraube) hat. Der Lehrer zeige dem Schüler die Benutzung derartiger Hilfsmittel.

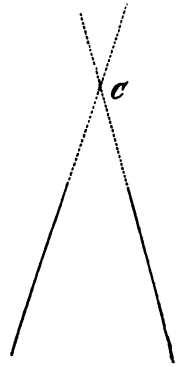
Fig. 11.



(Geometrische Konstruktionen von parallelen Linien folgen später, § 24, Aufg. 6; § 37, VI, c 1.)

3. Ungleichlaufende Linien: Die beiden vorderen Stangen des Tafelgestells zeigen zwei Linien mit verschiedener Richtung; nach unten zu gehen dieselben immer weiter auseinander (sie divergieren), nach oben dagegen nähern sie sich (sie konvergieren), bis sie sich in einem Punkte c (Fig. 12) treffen. Verlängert man sie noch über diesen Punkt hinaus, so sagt man, sie schneiden sich in c, und nun werden sie weiterhin wieder divergierend (oder divergent). Solche Linien heißen ungleichlaufend. Beispiele!

Fig. 12.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie teilt man die geraden Linien nach ihrer Lage zu einander ein?

Digitized by Google

2. Was sind gleichlaufende und ungleichlaufende Linien?
3. Suche parallele senkrechte, wagerechte und schräge Linien an verschiedenen Gegenständen auf!
4. Ziehe mit Hilfe des Winkelhakens durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden!

§ 10. Die geraden Linien nach ihrer Länge. (Das Messen der geraden Linien.)

Will man eine Linie *messen*, so muß man sie mit einer anderen, deren Länge bekannt ist, *vergleichen*. So mißt z. B. der Kaufmann einen Ballen Tuch, indem er nachsieht, *wievielmal* die Länge einer Elle oder die eines Meters in der Länge des Tuches *enthalten* ist. So mißt der Zimmermann die Länge eines Balkens, indem er nachsieht, wievielmal die Länge eines Fußes oder die eines Meters in der Länge des Balkens enthalten ist. Eine Linie messen heißt also: untersuchen, wie oft eine bekannte Längeneinheit in der Länge der zu messenden Linie enthalten ist.

Fig. 13.
1/10 m (1 Decimeter = 10 cm = 100 mm

In früherer Zeit hat man die Länge einzelner Glieder des menschlichen *Leibes* als Maß für die Längeneinheit angenommen, und man berechnete deshalb die Länge der Gegenstände nach Fußen, nach Spannen, nach Ellen (Ellbogenlänge), nach Hand- oder Daumen- oder Haarbreiten u. s. w. Da aber bei verschiedenen Menschen die Länge der Gliedmaßen *verschieden* ist, so leuchtet ein, daß derartige Maße *nicht* als Längeneinheiten brauchbar waren. — Wo es jedoch nicht auf mathematische Genauigkeit ankommt, wo sich's vielmehr nur darum handelt, eine *annähernd* richtige Vorstellung einer Längenausdehnung zu geben, wenden wir im gewöhnlichen Leben noch immer diese und andere derartige Naturmaße an. Man *schreitet* den Acker ab, man spricht von *Manneshöhe*, von der Entfernung eines *Steinwurfes* ꝛc.

Zur *genauen* Längenbestimmung bedürfen wir eines feststehenden, *unveränderlichen* Maßes. Als *Grundmaß* gilt in Deutschland seit 1872 die von den Franzosen aufgestellte Maßeinheit des Meters (welches $^1/_{40\,000\,000}$ des Erdumfanges darstellen sollte).

Am Meterstabe ist zu ersehen:
1 Meter zerfällt in 100 Centimeter,
1 Centimeter wieder in 10 Millimeter,
1 Meter also in 1000 Millimeter.

Übersichtliche Zusammenstellung der gesetzlich vorgeschriebenen Abkürzungen:

1 m = 100 cm,
1 cm = 10 mm.

1 m = 100 cm = 1000 mm.

Daraus folgt: 1 cm = $^1/_{100}$ m = 0,01 m,
1 mm = $^1/_{1000}$ m = 0,001 m.

Digitized by Google

Die Centimeter stehen also in der zweiten, die Millimeter in der dritten Decimalstelle neben den Metern.

Für größere Strecken (Wege, geographische Entfernungen) wendet man als Vielfaches vom Meter das Kilometer (km) = 1000 m an. 1 m also = $^1/_{1000}$ km = 0,001 km, so daß die Meter neben den Kilometern drei Decimalstellen erfordern. Hinweis auf die Kilometersteine einer Chaussee! Zu einem km Weges braucht ein erwachsener Fußgänger etwa 12 Minuten, ein Knabe eine Viertelstunde, so daß ersterer in der Stunde 5, letzterer 4 km zurücklegt. Auf Grund dieser Angabe vermögen die Schüler die Länge ihrer Schulwege, die Entfernungen naher, bekannter Ortschaften annähernd zu bestimmen.

Das Resolvieren und Reduzieren, sowie die Einübung der decimalen Schreibweise der Längenmaße wird bereits auf der Mittelstufe im Rechenunterricht erledigt, so daß es hier nur einer gründlichen Wiederholung bedarf.

Neben den Kilometern wird im Leben noch immer zur Bestimmung geographischer Entfernungen die Meile (ungefähr = $7\frac{1}{2}$ km) angewendet. Ein rüstiger Fußgänger legt dieselbe etwa in $1\frac{1}{2}$ Stunden zurück.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was heißt: eine Linie messen?
2. Welche unbestimmten Naturmaße werden bei ungefähren Längenbestimmungen zuweilen angewandt?
3. Gieb die in Deutschland gesetzlich vorgeschriebenen Längenmaße nebst Währungszahlen und Abkürzungen an!
4. a) Schreibe 7 m 8 cm 6 mm in decimaler Form als m; resolviere sodann in mm! b) Reduziere 4059 mm auf m!
5. Schätze ab und miß sodann die Ausdehnungen der Schulstube, des Schulhauses, verschiedener Hausgeräte von meist übereinstimmenden Ausdehnungen (Tisch, Stuhl, Schrank, Kommode ꝛc.), deine eigene Körperlänge, den Durchmesser unserer Münzen ꝛc.! Bestimme nach der Zeit die ungefähre Länge einzelner Wege vom Schulhause aus!
6. Zeichne nach dem Augenmaß Linien von bestimmter Länge und miß dann nach!
7. Aus den „Geometrischen Rechenaufgaben für die Oberklasse der Volks- und Bürgerschule, sowie für Fortbildungsschulen und Seminarvorbereitungsanstalten, gesammelt und herausgegeben vom Schulrat Dr. C. Kehr“ (8. Aufl. Gotha bei Thienemann im Verlag), können hier je nach Zeit und Bedarf von den Beispielen Nr. 1—7, 14—20, 22—31 (S. 1—4) einzelne gerechnet werden.

§ 11. Das Messen gerader Linien auf dem Felde. (Gebrauch der Meßkette.)

Der Lehrer wird sich leicht von Bauleuten eine Meßkette, das wichtigste Hilfsmittel beim „Feldmessen“, verschaffen können, um durch unmittelbare Anschauung und durch wirklichen Gebrauch die Schüler damit bekannt zu machen.

Die Meßkette ist meistens 20 m lang und besteht — unter dieser Voraussetzung — aus zwanzig fast 1 m langen Gliedern von Eisendraht in der Dicke eines Federkiels, die an ihren umgebogenen Enden durch

Digitized by Google

eiserne oder messingene Ringe verbunden sind. Die Weite von der Mitte eines solchen Ringes bis zur Mitte des nächstfolgenden beträgt genau 1 m. Fig. 14 stellt ein Stück einer solchen Meßkette in der Verkleinerung dar. Die Länge von fünf zu fünf m wird bei der Meßkette durch größere Ringe, als die sind, welche die einzelnen Gelenke mit einander verbinden, bezeichnet. Auch ist es für den Transport und die Anwendung auf dem Felde zweckmäßig, wenn jedes Glied wieder hälftig geteilt ist. An den Enden der ganzen Kette aber befinden sich stets zwei größere Ringe (z. B. a) von ungefähr 4 cm Durchmesser, welche dazu dienen, um sogenannte Kettenstäbe (dS) hindurchstecken zu können (Fig. 15), mittelst welcher man die Kette bequem in die zu messende gerade Linie bringen und fortziehen kann. Die Kettenstäbe müssen an dem unteren Ende mit eisernen Schuhen oder Spitzen versehen und so dick sein, daß sie die Endringe genau ausfüllen. Durch den oberen Teil jener Schuhe gehen eiserne Stäbchen (e), auf welchen die Endringe der Kette ruhen. Endlich ist noch zu bemerken, daß die Mittelpunkte dieser Ringe den Anfang und das Ende der Kette bilden. Soll eine gerade Linie auf dem Felde gemessen werden, so wird sie, wenn ihre Länge beträchtlich ist, vorher erst abgesteckt, d. h. es werden zwischen dem Anfangs- und Endpunkte derselben mehrere Stangen so eingerichtet, daß immer die eine die andere deckt, mithin die folgenden vor der ersten nicht gesehen werden können.

Fig. 14.

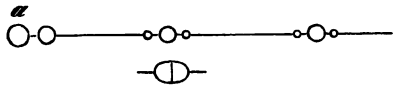


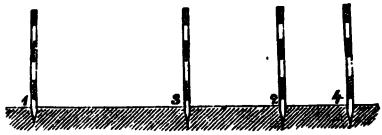
Fig. 15.

Hierauf wird zur Messung geschritten und dabei folgendermaßen verfahren: Der hintere Kettenzieher, welcher seinen Kettenstab in den Anfangspunkt der zu messenden Linie gestellt hat, richtet den Vordermann oder vielmehr dessen Kettenstab so ein, daß beide Kettenstäbe und die vorstehende Stange sich in einer geraden Linie befinden. Alsdann bringt der Vordermann die Kette durch wiederholtes In-die-Höhe-heben oder -schleudern in eine gerade Linie, zieht selbige zugleich straff an und steckt seinen Kettenstab lotrecht in die Erde. In diesen Punkt wird darauf ein sogenannter Zähler — ein ungefähr 30 cm langer, unten spitzer und oben zu einem Ringe umgebogener Eisendraht — gesteckt, und nun geht der Vordermann weiter. Kommt alsdann der Hintermann dahin, wo der Zähler steht, so macht er Halt, zieht den Zähler heraus und steckt seinen Kettenstab genau in diesen Punkt. Jetzt wird der Vordermann von neuem eingerichtet und alles das wiederholt, was soeben beschrieben wurde, und so fort, bis die ganze Linie gemessen ist. Nach der Anzahl der Zähler wird alsdann die Länge der Linie angegeben; hat z. B. der Hintermann deren 5 Stück gesammelt, so beträgt die Länge der Linie bis zu dem Punkte, wo der 6. Zähler gestanden hat, 6mal 20, d. i. 120 m. Selten kommt indessen der Fall vor, daß eine zu messende Linie gerade eine gewisse Anzahl ganzer Kettenzüge

Digitized by Google

oder Kettenlängen enthält; in den meisten Fällen enthalten sie etwas mehr oder weniger. Dieses Mehr oder Weniger muß dann zu der Anzahl von Metern, welche sich durch das ein- oder mehrmalige Anziehen der Kette ergeben hat, addiert oder davon subtrahiert werden, um die ganze Länge der zu messenden Linie zu erhalten. Die Zähler, deren man in der Regel 10 Stück bei sich führt, müssen — damit kein Irrtum entstehe — von dem Hintermanne an den Vordermann zurückgegeben werden, bevor eine neue Linie zu messen angefangen wird. Je mehr Vorsicht bei Messung einer Linie gebraucht wird, desto mehr kann man von der Richtigkeit dieser Messung überzeugt sein. Zu den Vorsichtsmaßregeln aber gehört: 1) daß man nicht von der geraden Linie während dieser Messung abweiche; 2) daß die Kettenstäbe jedesmal lotrecht in die Erde gesteckt werden; 3) daß sich der hintere Kettenzieher seinen Kettenstab, beim straffen Anziehen der Kette vonseiten des Vordermannes, nicht fortrücken lasse, was, besonders in lockerem Boden, leicht geschehen kann, ohne daß man solches gewahr wird; 4) daß die Zähler und Kettenstäbe genau in dem richtigen Punkte eingesetzt werden; 5) daß die Kette jedesmal gerade gelegt und dabei gehörig straff angezogen, und 6) daß öfter nachgesehen werde, ob die Kette ihre richtige Länge habe. Durch langen Gebrauch zieht oder dehnt sich die Kette, was vorzüglich von dem allmählichen Abreiben oder Abschleifen der Ringe herrührt. Deshalb muß sie von Zeit zu Zeit geprüft und, wenn sie die richtige Länge nicht mehr hat, wieder berichtigt werden. Auch die Unebenheiten des Bodens muß man berücksichtigen und darauf sehen, daß die Kette immer so viel als möglich horizontal oder wagerecht gehalten werde. Bei geringen Ansteigungen oder Abdachungen des Bodens ist es hinreichend, die Kette etwas straffer, als gewöhnlich, anziehen zu lassen. (Vgl. Wölfer, Feldmessen.) — Um die erste der angeführten 6 Vorsichtsmaßregeln zu beachten, muß man die zu messende Linie (wenn sie länger als die Meßkette ist), abstecken. Das dabei anzuwendende Visieren ist daher besonders zu üben. Zu dem Zwecke nimmt man einige Stangen von gleicher Dicke (Meßstäbe) und steckt sie an den Endpunkten der zu messenden Linie 1, 2 (Fig. 16) lotrecht in die Erde. Nun soll zwischen diesen beiden Endpunkten der Stab 3 so eingesteckt werden, daß er mit 1. 2 in einerlei Richtung steht. Wie würde das anzufangen sein? — Schon an Stecknadeln, die man in eine Tischplatte steckt, läßt sich nachweisen, daß man zur Lösung dieser Aufgabe hinter 2 noch eine Meßstange 4 so stecken muß, daß beim Visieren die Punkte 4. 2. 1 in einerlei Richtung liegen und daß dann, je nach dem Visieren, der Stab 3 so eingesteckt wird, daß er genau mit 4. 2. 1 in eine Richtung kommt, die beiden geraden Linien 3. 2. 4 und 4. 2. 1 also die zwei Punkte 2 und 4 gemein haben. — Was würde aber zu thun sein, wenn man nicht hinter die Punkte 1 und 2, sondern nur zwischen sie treten könnte? —

Fig. 16.



Man müßte dann gleich den Punkt 3 bestimmen, indem eine Person

Digitized by Google

sich bei Punkt 1 aufstellt und eine zweite Person den Stab 3 so lange seitwärts nach rechts oder links rückt, bis ihr die erste Person — in dem Augenblick, wo für sie Stab 2 durch Stab 3 gedeckt wird — Halt zuruft. Es sind also hierzu zwei Personen nötig, während im ersten Falle auch eine Person ausgereicht hätte.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

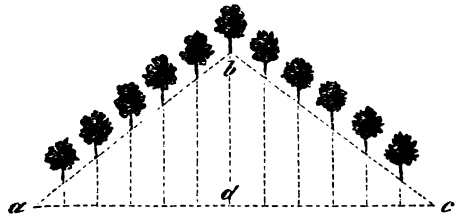
1. Beschreibe die Meßkette und ihren Gebrauch!
2. Schätze verschiedene Ausdehnungen im Freien ab (Schulhof, Garten ꝛc.) und miß dann mittelst der Meßlatte nach, bei größeren Entfernungen durch vorheriges Abstecken und unter Anwendung der Meßkette!
3. Stecke Linien von bestimmter Länge im Freien ab!

[§ 12. Das Messen schiefer Linien auf dem Felde (Nivellieren).

Eine besondere Betrachtung erheischt das Messen schiefer oder schräger Linien auf dem Felde, und es hat der Lehrer den Schülern vorerst begreiflich zu machen, weshalb man statt der schiefen Linien stets wagerechte mißt (die Projektion der schiefen Linie auf die wagerechte Ebene), und daß hier zuerst nötig ist, in den Endpunkten der schiefen Linie Senkrechte zur Horizontalen zu errichten, deren Abstände von einander zu messen sind.

Gewöhnlich meint der Schüler, daß auf einem wellenförmigen Acker mehr Ähren, an den Bergesabhängen mehr Bäume stehen, als auf der entsprechend ebenen Fläche, und es ist deshalb dem Schüler unbegreiflich, weshalb der Geometer die Unebenheiten des Landes, die Hügel und Berge, nicht als solche mißt und aufzeichnet, sondern daß seine Messung und seine Karte stets alles als in einer Ebene liegend darstellt. Diesen Irrtum dem Schüler zu benehmen, ihm zu zeigen, daß auf einer geneigten Fläche nicht mehr und nicht weniger Bäume ꝛc. stehen können, als auf einer entsprechend wagerechten, weil die Bäume immer senkrecht in die Höhe wachsen, ist am besten dadurch zu veranschaulichen, daß man ein Häufchen Sand oder etwas Thon auf den Tisch oder auf ein Brettchen legt und nun — siehe Fig. 17 — in den Thon ꝛc. entsprechend lange Stäbchen senkrecht einsticht. Denkt man sich nun diese Stäbchen als Bäume, und deren Wurzel verlängert, so wird das Kind es auch leicht begreiflich finden, daß auf der schiefen Linie ab nicht mehr und nicht weniger Bäume stehen können, als auf der wagerechten Linie ad, obgleich — wie eine Messung zeigt — die schiefe Linie ab länger ist, als die wagerechte Linie ad. Daraus wird das Kind sehen, daß ein schief liegendes Stück Land ab nicht mehr Früchte hervorbringt, als das wagerecht liegende ad, obgleich das letztere nicht so lang ist wie das erstere. Wüchsen freilich die Bäume, Gräser ꝛc. auf schiefliegenden Ländereien

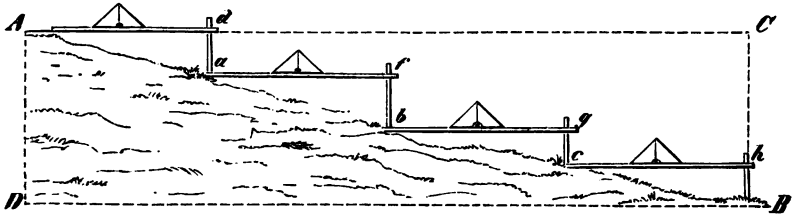
Fig. 17.



Digitized by Google

nicht senkrecht, sondern schief, so daß die Bäume ꝛc. mit dem Boden einen rechten Winkel bildeten, so wäre allerdings die ganze Sache eine andere, und das jetzt besprochene Meßverfahren wäre nicht anwendbar. Das Kind wird schließlich auch zu der Überzeugung kommen, daß der Geometer bei dem senkrechten Wuchse des Getreides und der Bäume Recht hat, wenn er schiefe Linien stets als wagerechte mißt, und daß er Erhöhungen und Vertiefungen als solche nicht weiter berücksichtigt. Hätte er z. B. — siehe Fig. 18 — den Abhang AB zu messen, so würde es falsch sein, die schiefe Linie AB zu messen.

Fig. 18.



Der Geometer müßte vielmehr die wagerechte Linie DB oder, was dasselbe ist, die wagerechte Linie AC messen. Allein wir nehmen an, daß die Linie zu lang ist, als daß er sie auf einmal messen könnte; er muß in diesem Falle die Linie AB in mehrere beliebige Teile teilen, als Aa, ab, bc, cB. Nun mißt er zuerst die Linie Ad, nachdem er mit der Setzwage gesehen hat, daß die Linie wagerecht ist. Dann mißt er die wagerechte Linie af, indem er bei b (wie auch bei a, c und B) einen Pfahl einschlägt, an diesem mit Hilfe der Setzwage zuerst die Linie af wagerecht macht und dann deren Länge mißt. So geht es fort bei bg, und endlich bei ch. Gesetzt nun, es sei die Linie

Ad = 6,58 m
af = 6,25 m
bg = 6,75 m
ch = 6,42 m, so ist die Linie
AC = 26 m, und man sagt nun: Die Länge des Ackers AB beträgt 26 m.

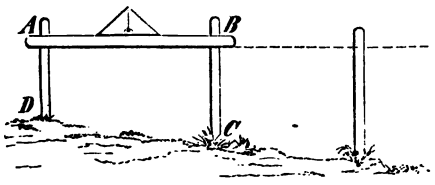
Sind die beiden Punkte nicht zu weit von einander entfernt, so mißt man die Wagerechte mit Hilfe einer Meßlatte und einer Setzwage. Sind die beiden Punkte jedoch weiter von einander entfernt, dann wendet man statt der Setzwage die Kanal- oder Wasserwage, oft auch Nivellierinstrument genannt, an. Statt weiterer und breiterer Auseinandersetzungen gehe der Lehrer lieber mit seinen Schülern hinaus in das Freie und lasse die folgenden Aufgaben lösen*):

Aufgabe 1. Einen Platz — einen Hof, ein Stück Chaussee ꝛc. — wagerecht abzuebnen. Man läßt mehrere Pfähle einschlagen

*) Vgl. Mitterer, Geometrie.

Digitized by Google

Fig. 19.



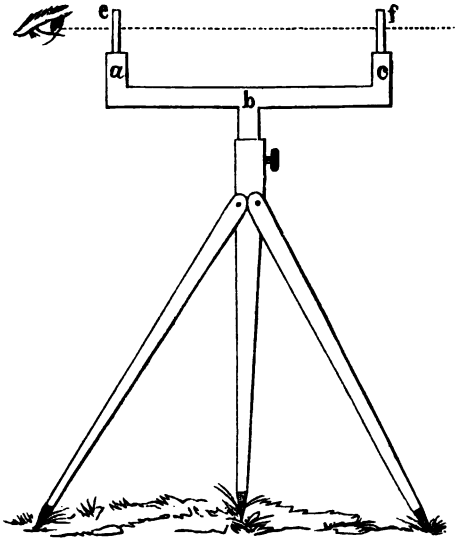
(Fig. 19), legt eine gerade Latte AB an dieselben, stellt dann die Setzwage auf und bemerkt bei A und B mit Linien die Höhe der Latte, wodurch man sehen kann, wieviel der Punkt C niedriger ist, als der Punkt D. Auf diese Art verfährt man mit allen eingeschlagenen Pfählen. Ist die Höhe überall richtig angezeigt, so weiß man, wieviel Erde an einem Orte aufgeschüttet und an einem anderen abgetragen werden muß.

Aufg. 2. Eine gerade Linie über einen Berg zu messen (s. Fig. 18). Man nehme eine Meßlatte von 4 oder 5 m und befestige vorn an die Latte eine Setzwage, über welche ein Senkblei heruntergeht, welches man auf- und abziehen kann. Beim Messen lege man die Latte wagerecht, so daß also das von der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks herunterhängende Lot genau die auf der Setzwage eingeritzte senkrechte Linie deckt, und stecke dort, wo das Senkblei den Boden berührt, einen kleinen Stab ein, an welchem man die Latte wieder anlegt; und so fährt man fort, bis die Linie gemessen ist.

Aufg. 3. Das Gefälle des Wassers auf einer längeren Linie zu finden.

Da es sich hier um das Abmessen einer längeren Strecke handelt, so würde das obige Verfahren zu beschwerlich sein, und man wendet daher in diesen Fällen (bei Anlage von Wasserleitungen zu Mühlen, beim Drainieren*), beim Bau von Straßen und Eisenbahnen 2c.) die Wasserwage, auch Kanalwage oder Nivellierinstrument genannt, an.

Fig. 20.



Ehe jedoch die Kinder die Wasserwage zum Messen gebrauchen, müssen sie erst die Einrichtung und die Bestandteile der Wasserwage kennen lernen. Zur Erklärung derselben mag hier Folgendes gesagt sein:

Die Kanalwage (Fig. 20) besteht aus einer blechernen Röhre bac von etwa 1 m Länge mit aufgebogenen Enden ac, worin gläserne Röhren e und f wasserdicht eingesetzt sind. Die blecherne Röhre mit ihrer Hülse b wird in ein hölzernes Gestell

*) Es ist hierbei der Nutzen des Drainierens zu besprechen.

Digitized by Google

(Stativ) gestellt (geschraubt), dessen drei Beine beweglich sind. Die Kanalwage kann sonach hoch oder niedrig gestellt und auf dem Stativ gedreht werden. Die Röhre wird sodann so weit mit gefärbtem Wasser gefüllt, bis dasselbe in den Glasröhren e und f zum Vorschein kommt. Sobald das Wasser in dieser Röhre stillsteht, ist der Stand desselben in e und f *wagerecht*, und man erhält, sobald man über die beiden Wasserflächen hinsieht, eine horizontale Linie.

Will man nun nivellieren, so braucht man außer dem Nivellierinstrumente oder der Wasserwage auch noch eine *Latte* von 3—4 m Höhe, welche an der Seite genau in cm abgeteilt ist (Fig. 21). An der Vorderseite der Latte befindet sich eine viereckige Tafel, welche übers Kreuz in schwarze und weiße Felder abgeteilt ist. Diese Tafel kann mit Hilfe eines Fadens, der oben auf der Latte über eine Rolle hingeht, nach Bedürfnis in die Höhe gezogen oder niedergelassen werden, bis sich die Mittellinie ac der Tafel mit der wagerechten Ebene des Wassers in der Kanalwage in *einer* Ebene befindet. Wollte man nun z. B. den Höhenunterschied zwischen x und y (Fig. 22) messen, so würde man in x das Nivellierinstrument aufstellen und die Tafel an der in y aufgestellten Latte durch einen Gehilfen so lange empor- oder niederziehen lassen, bis die Mittellinie der Tafel mit der an den Wasserrändern der Kanalwage entlang visierten Linie genau übereinstimmt. Zeigte nun die Tafel an der Latte 3,86 m, und betrüge die Höhe des Nivellierinstrumentes 1,20 m, so würde der Höhenunterschied 2,66 m betragen.

Fig. 21.

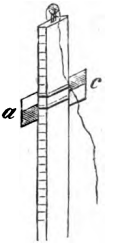
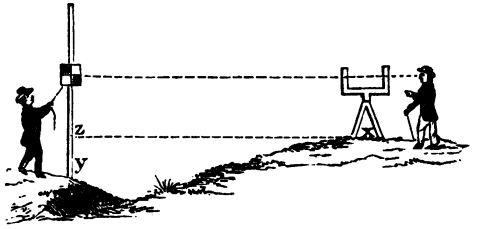


Fig. 22.



Da man aber mit der Wasserwage nur bei *windstillem* Wetter und auch dann nur auf etwa 30 m weit mit Sicherheit visieren kann, so thut man wohl, bei *größerer* Entfernung zweier Punkte, besonders wenn die *Steigung* bedeutend ist, die Strecke in mehrere *kleinere* zu zerlegen und die gefundenen Höhenunterschiede der Zwischenstationen zu addieren. Kommt es aber vor, daß die Linie *abwechselnd* steigt und fällt, so legt man sich eine Tabelle an, schreibt in die *eine* Rubrik die Steigungen, in die *andere* das Gefälle und zieht dann die letztere Summe von der ersteren ab.]

§ 13. Von dem Aufzeichnen gemessener Linien.

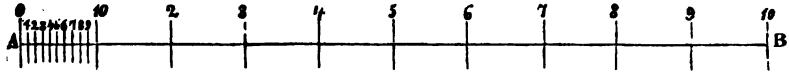
(Der verjüngte Maßstab.)

Hat man eine längere Linie, z. B. die Länge oder Breite eines Hauses, eines Gartens, eines Ackerfeldes, eines Ortes, einer Flur u. s. w. gemessen, und will man dieselbe aufs Papier zeichnen, so kann dies selbstverständlich *nicht* in der nämlichen Größe, wie sie das angewendete

Digitized by Google

Maß giebt, geschehen, weil man dazu soviel Papier haben müßte, als die Größe des Ackerstückes u. s. w. beträgt. Man muß sich deshalb ein kleines oder verjüngtes (verjüngendes) Maß anfertigen, wenn man nicht das sehr gewöhnliche und nützliche Instrument eines verjüngten Maßstabes, von dem nachher die Rede sein wird, bereits besitzt. — Gesetzt, wir hätten die Länge und Breite eines kleinen Gartenbeetes gemessen und gefunden, daß es 1,45 m lang und 87 cm breit sei. Wollen wir uns diese Linien, wie es bei einem Bauriſſe geschieht, aufzeichnen, so müssen wir uns erst einen Maßstab anfertigen. Wir zeichnen deshalb eine gerade Linie AB (Fig. 23), welche ein Meter bedeuten soll,

Fig. 23.



teilen dieselbe in 10 gleiche Teile (Decimeter) und einen derselben wieder in 10 gleiche Teile. Letztere würden demnach den Centimetern entsprechen. Wenn wir nun die Länge jenes Gartenbeetes aufzeichnen wollen, so müssen wir eine Linie zeichnen, welche zunächst so lang ist wie AB (1 m), und daran noch 45 cm nach unserem Maßstabe ansetzen. Dies geschieht, wenn wir die Länge von 0 bis 4 nach den größeren Ziffern des Maßstabes messen; denn jede der größeren Abteilungen des Maßstabes 0 bis 1, 1 bis 2, 2 bis 3, u. s. w. entspricht dem Wert von 1 Decimeter oder von 10 cm. Endlich muß an die Linie noch die Länge von 5 cm angesetzt werden. Centimeter aber haben wir dadurch erhalten, daß wir den zehnten Teil 0 bis 1 unseres Maßstabes AB wieder in zehn Teile geteilt haben. Setzen wir also noch 5 von den Teilen der Länge 0 bis 1 der bis jetzt gezeichneten Linie zu, so haben wir nunmehr eine solche von 1,45 m Länge gezeichnet. — Wie groß ist nun die Breite des Beetes? Zeichnet dieselbe nach unserem Maßstabe auf! Wie lang muß die Linie sein, welche zuerst zu zeichnen ist? 80 cm. Wie messen wir diese Linie auf unserem Maßstabe ab? Wieviel muß noch daran gesetzt werden? Wie messen wir diese Linie ab? Wie lang ist nunmehr die ganze Linie, welche wir gemessen haben? Länge und Breite treffen bei jenem Beete in einem rechten Winkel zusammen, so daß die Breite senkrecht auf der Länge steht; wie müssen deshalb auch diese beiden Linien auf Papier gezeichnet werden? Zeichne jetzt das ganze Beet auf! Wieviel Längenseiten hat es? Wieviel Breitenseiten? Miß nach dem obigen Maßstabe einmal ab, wieviel Meter und Decimeter eine Linie haben würde, die von der einen Ecke der Figur nach der entgegengesetzten gezogen würde! Zeichnet Linien, welche nach dem obigen Maßstabe a) 52 cm, b) 1,76 m lang sind! Zeichnet eine Tischplatte nach obigem Maßstabe von 1,27 m Länge und 91 cm Breite, ein Fenster von 88 cm Breite und 1,34 m Höhe u. s. w.

Bei dem angenommenen Maßstabe ist die Linie AB, die 1 m darstellen soll, nur $^1/_{10}$ von einem wirklichen m, verhält sich also zu diesem wie 1 zu 10. Man sagt: es ist ein Maßstab von 1 zu 10 und schreibt über die Linie AB: Maßstab = 1 : 10.

Zur Aufzeichnung größerer Gegenstände, z. B. eines Bauplanes

Digitized by Google

würde sich etwa der Maßstab 1 : 100 eignen, wo 10 m im Raum durch $^1/_{10}$ m der Zeichnung (= AB) dargestellt werden, 1 m durch 1 cm (= Linie $0_{.1}$), $^1/_{10}$ m durch 1 mm (= Linie $A_{.1}$). Bei größeren Grundstücken würde vielleicht der Maßstab 1 : 1000 ausreichen, wobei Linie AB 100 m bedeutete. Welches Stück bedeutet dann 10 m, welches 1 m? Bei Flur- und Ortsplänen wäre der Maßstab 1 : 10000 passend. Was bedeutet dann AB, $0_{.1}$, $A_{.1}$?

Selten sind aber die üblichen Maßstäbe bei Plänen und Karten so bequeme dekadische Zahlen, wie die oben angeführten, bei denen eine in cm und mm zerlegte Linie genügte. So zeigen z. B. die Karten der einzelnen europäischen Länder im Atlas von Diercke und Gäbler den Maßstab in Fig. 24.

Fig. 24.

Maßstab = 1 : 4500000.

Deutsche geographische Meilen.

Kilometer.

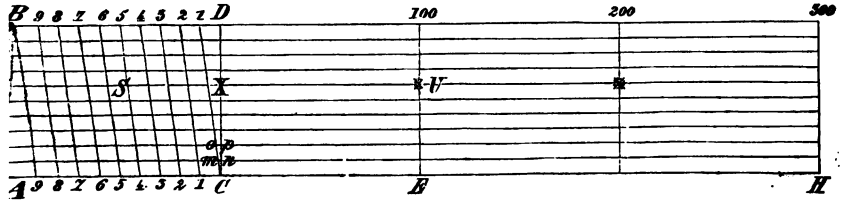
Mit Hilfe dieses Maßstabes können nun auf den betreffenden Karten alle Entfernungen in Meilen oder Kilometern abgemessen werden.

Gesetzt aber, uns wäre Fig. 24 nicht gegeben und wir sollten selbst einen solchen Maßstab 1 : 4500000 zum Zweck einer Kartenzeichnung herstellen: wie müßten wir da zu Werke gehen?

Jede Ausdehnung der Karte müßte $^1/_{4500000}$ von der entsprechenden Ausdehnung im Raume sein, z. B. 100 km im Raum würden darzustellen sein durch $^{100}/_{4500000}$ km $= {}^{100000}/_{4500000}$ m $= {}^1/_{45}$ m $= {}^{1000}/_{45}$ mm $= 22{,}2$ mm. Wir zeichnen daher eine Linie von 22,2 mm Länge und schreiben an das Ende derselben 100 km. Durch Teilung dieser Linie in 10 gleiche Teile erhalten wir je 10 km, was wir durch die Zahlen 10, 20, 30 ꝛc. andeuten.

Eine nochmalige Teilung der Zehntel in 10 Teile würde sodann die einzelnen km ergeben. Diese Teilung in 100 gleiche Teile würde sich an der kleinen Linie schwer ausführen lassen. Zu diesem Zwecke wendet man noch den verjüngten Maßstab an, wie ihn Fig. 25 darstellt und wie er meist den Reißzeugen auf einem besonderen Lineal beigegeben ist. Bei der Herstellung desselben teilt man wie vorhin zu-

Fig. 25.



Digitized by Google

nächst die als Längeneinheit geltende Linie AC in 10 gleiche Teile C1, 1 2, 2 3 ꝛc., errichtet in A eine Senkrechte BA und zieht durch B eine Parallele zu AH. Alsdann teilt man sowohl AB wie auch BD in 10 gleiche Teile und zieht außer DC nach die Quer- oder Transversallinien C1, 1 2, 2 3 ꝛc. Endlich zieht man noch durch die Teilpunkte von AB Parallellinien zu AH.

Die schräge Linie C1 durchschneidet sämtliche 10 wagerechte Linien derartig, daß die abgeschnittenen Stücke von unten nach oben stetig zunehmen bis zu D1 = $^1/_{10}$ AC, so daß also Linie mn = $^1/_{10}$ D1 oder $^1/_{100}$ AC, op = $^2/_{100}$ AC ist, ꝛc.

Wenn nun AC oder CE 100 km bedeutet, so gilt C1 oder D1 10 km, Linie mn = 1 km, op = 2 km ꝛc. Linie US würde 100 + 40 + 6 = 146 km bedeuten. Kleinere Linien als km lassen sich an diesem Maßstabe nicht darstellen, haben aber auch für die Genauigkeit der darzustellenden Karte kaum noch Wert. — Nimm an diesem Maßstabe 287 km in den Zirkel! — Läßt man AC statt 100 km 100 m gelten, so bedeutet selbstverständlich C1 10 m, mn = 1 m, US = 146 m. — Stellt AC nur 1 m (= 100 cm) dar, so bedeutet C1 10 cm, mn = 1 cm, US = 1,46 m. Stelle nach diesem letzteren Maßstabe 3,27 m dar!

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Schreibe aus deinem Atlas die Maßstäbe einzelner Karten ab und erkläre ihre Bedeutung!
2. Miß mit Hilfe des Kartenmaßstabes (im Atlas oder an der Wandkarte) die Entfernungen deines Wohnortes von einzelnen großen Städten Deutschlands und die Entfernungen Berlins von den Hauptstädten der europäischen Staaten!
3. Stelle einen einfachen verjüngten Maßstab (nur mit Zehnteilung) von 1 : 400 dar, so daß die Längeneinheit 10 m bedeutet! Nimm davon 67 m in den Zirkel!
4. Zeichne einen verjüngten (Transversal-) Maßstab (mit Hundertteilung) von 1 : 200 000, so daß die Längeneinheit (AC) 10 km bedeutet. Nimm davon 83,4 km in den Zirkel!

Kapitel 2.

Von den krummen Linien.

Die krumme Linie ist die Bahn eines Punktes, welcher bei fortschreitender Bewegung die Richtung stets ändert. Die bekannteste krumme Linie ist die Kreislinie.

§ 14. Die Kreislinie.

Diese finden wir bei einem Siebe, bei einem Wagenrade, Mühlsteine, an Geldmünzen ꝛc.; sie ist eine (in einer Ebene liegende) in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, welche in allen ihren Teilen von

Digitized by Google

einem bestimmten Punkte, welcher der Mittelpunkt oder das Zentrum heißt, gleichweit absteht. Die Kreislinie zeichnet man mit dem Zirkel, wobei die eine Zirkelspitze den Ort des Mittelpunktes bestimmt, während man mit der anderen die Kreislinie beschreibt. Man gebraucht zu diesem Zwecke bei größeren Kreislinien auch eine Stange, die an einem Ende durchbohrt ist. Durch das Loch kann ein Stift in den Erdboden gesteckt werden, um den sich die Stange dreht. In beliebiger Entfernung sind in die Stange Löcher gebohrt, durch welche ein anderer Stift gesteckt werden kann, um damit den Kreis zu beschreiben (Stangenzirkel). Man kann sich auch einer Schnur bedienen, die an beiden Enden mit Schlingen oder Ringen versehen ist, durch deren einen ein Stift zur Bezeichnung des Mittelpunktes eingesteckt wird. Mit einem Stifte durch die Schlinge des anderen Endes wird bei straffer Anspannung der Schnur der Kreis beschrieben.

Fig. 26.

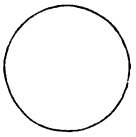
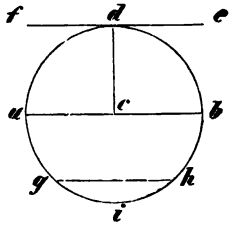


Fig. 27.



Der Lehrer beschreibt einen Kreis und zeigt den Schülern den Mittelpunkt c, den Umfang adbhiga, den Halbmesser cd und den Durchmesser acb, einen Bogen gih, eine Sehne gh ꝛc. und richtet nun folgende Fragen an die Schüler: Welche Linie wird der Umfang des Kreises heißen? Wie weit ist jeder Punkt des Umfanges vom Mittelpunkt entfernt? Die Kreislinie (Peripherie) ist also diejenige krumme Linie, welche überall gleichweit vom Mittelpunkte absteht. — Die gerade Linie, welche die Entfernung des Mittelpunktes vom Umfange angiebt, heißt ein Halbmesser des Kreises oder Radius. Wie sind alle Halbmesser desselben Kreises bezugs ihrer Länge beschaffen? Der Lehrer teilt den Kreis durch einen Durchmesser in zwei Halbkreise. Durch welchen Punkt des Kreises geht diese Linie? Wo fängt sie an? Wo hört sie auf? Diese Linie heißt ein Durchmesser. Der Durchmesser ist also diejenige gerade Linie, welche, durch den Mittelpunkt des Kreises gehend, zwei Punkte des Kreisumfanges verbindet. In wieviel Teile teilt der Durchmesser den Kreis? Wie heißen diese? Wieviel Halbmesser sind in einem Durchmesser enthalten? Wieviel Durchmesser kann ich in einem Kreise ziehen? Wie sind alle Durchmesser desselben Kreises hinsichtlich ihrer Länge beschaffen? ꝛc. — Der Lehrer verbindet zwei Punkte des Umfanges durch eine Sehne. In wieviel Teile teilt sie die Kreislinie? Diese Teile nennt man Bogen. Erklärung dieser Ausdrücke durch Hinweisung auf einen Bogen mit der Sehne zum Schießen. Was für eine Linie ist auch der Durchmesser? Welche Sehne ist die längste? Daß eine gerade Linie am Kreise, welche denselben nur in einem einzigen Punkte berührt (— welche rechtwinklig auf dem Halbmesser des Kreises im Berührungspunkte steht —) ein Tangente (fde) genannt wird, kann nebenbei bemerkt werden. —

Haben zwei oder mehrere Kreise (wie z. B. bei den Ringen eines

Digitized by Google

Fig. 28.

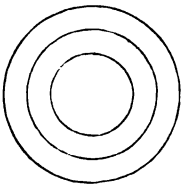
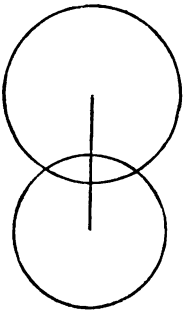


Fig. 29.



Kochherdes, einer Schießscheibe, einer Wasserfläche, in die ein Stein geworfen worden ist, 2c.) einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, so heißen sie konzentrisch (Fig. 28), alle anderen excentrisch. (Die Verbindungslinie der Mittelpunkte heißt Centrale.) Letztere können wieder 1. sich in 2 Punkten schneiden (Fig. 29), 2. sich in einem Punkte berühren, und zwar von innen (Fig. 30) oder von außen (Fig. 31), 3. gar keinen Punkt gemeinsam haben. (Ein Kreis von Fig. 30 und ein Kreis von Fig. 31.)

Fig. 30.

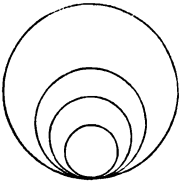
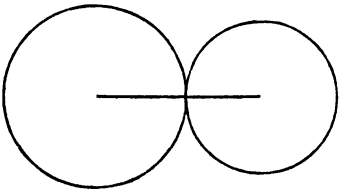


Fig. 31.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Gieb Beispiele für das Vorkommen der Kreislinie an!
2. Was ist eine Kreislinie? (Begriffserklärung.)
3. Wie entsteht ein Kreis?
4. Nenne Linien im und am Kreise, gieb die Erklärung derselben und zeichne einen Kreis mit den betreffenden Linien!
5. Welche Lage können zwei Kreise zu einander haben? Zeichne konzentrische, innere und äußere Berührungskreise! (Achte darauf, daß die Mittelpunkte und der Berührungspunkt in einer Geraden liegen!)

§ 15. Das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser.

Die Entwickelung des Verhältnisses zwischen Kreisumfang und Durchmesser kann selbstverständlich hier nur auf dem Wege der Veranschaulichung geschehen. Um eine kreisrunde Scheibe oder Walze von 14 cm Durchmesser lege man einen Faden oder ein Meßband, und man findet, daß der Umfang etwa 44 cm beträgt, also $\frac{44}{14} = 3\frac{1}{7}$ mal so groß ist als der Durchmesser. Dasselbe Verhältnis findet bei allen Kreisen statt. Man könnte auch ein Rad auf einer ebenen Bahn fortrollen, bis es eine Umdrehung gemacht hat (mit einem am Umfange angebrachten Zeichen wieder den Boden berührt); die Länge des Weges giebt dann die Länge der Peripherie an, und ein Vergleich mit dem Durchmesser zeigt wieder, daß auch hier die Peripherie $3\frac{1}{7}$ mal so groß ist als der Durchmesser. Also verhält sich der Durchmesser zum Kreisumfange wie $1 : 3\frac{1}{7}$ oder wie $7 : 22$. Mathematiker haben dieses Verhältnis

Digitized by Google

noch genauer ausgerechnet und für $3\frac{1}{7}$ eine vielstellige Decimalzahl gefunden, die man bei praktischen Berechnungen gewöhnlich auf 3,1416 oder 3,14 abkürzt. Diese Zahl, welche angiebt, wievielmal so groß der Kreisumfang als der Durchmesser ist, bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π (spr. pi), dem Anfangsbuchstaben des Wortes Peripherie.

Aus dem Vorigen folgt: 1. Man findet die Peripherie eines Kreises, indem man den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$ oder 3,14 multipliziert. (Bezeichnen wir den Durchmesser mit d und schreiben statt $3\frac{1}{7}$ π, so erhalten wir für den Umfang U die „Formel": $U = d.\pi$.)

2. Da der Durchmesser im Umfange 3,14 mal enthalten ist, so müssen wir, um den Durchmesser zu erhalten, den Umfang wieder durch 3,14 dividieren $\left(d = \frac{U}{\pi}\right)$.

3. Wenn der Durchmesser in der Peripherie 3,14 mal enthalten ist, so muß der Halbmesser doppelt so oft, also 6,28 ($6\frac{2}{7}$) mal in ihr stecken. Ich finde daher den Umfang aus dem Halbmesser (Radius, r), wenn ich denselben mit 6,28 multipliziere ($U = r.2\pi$ oder $2r.\pi$).

4. Den Radius finde ich daher wieder aus der Peripherie, wenn ich dieselbe durch 6,28 dividiere $\left(r = \frac{U}{2\pi}\right)$.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie verhält sich der Durchmesser eines Kreises zum Umfange?
2. Wie berechne ich die Peripherie: a) aus dem Durchmesser? b) aus dem Halbmesser?
3. Wie finde ich aus der Peripherie: a) den Durchmesser? b) den Halbmesser?
4. Rechne ausgewählte Beispiele aus den „Geometrischen Rechenaufgaben von Kehr" S. 4—7 (Nr. 1—18 zur Berechnung der Peripherie, Nr. 19—32 zur Berechnung des Durchmessers und Halbmessers)!

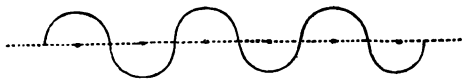
§ 16. Von anderen krummen Linien.

Daß jeder, auch der kleinste Teil einer Kreislinie ein Bogen heißt, haben wir schon im Vorhergehenden gesehen. Wo hast du solche Bogen gesehen? (Gewölbe-, Brücken-, Fenster-, Armbrustbogen ꝛc.) Hier ist nur noch zu bemerken, daß die innere Höhlung eines Bogens (— das Innere einer Sichel, des Mondviertels, eines Brückenbogens, eines Thales ꝛc. —) hohl oder konkav, dagegen die äußere, runde Bauchung (— ein Maulwurfshügel, eine Bergkuppe, die äußere Seite einer Sichel oder des Mondrandes —) erhaben oder konvex genannt wird.

Mit Hilfe des Kreisbogens lassen sich mehrerlei krumme Linien bilden:

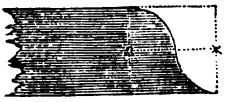
1. Teilt man eine gerade Linie in lauter gleiche Teile, und nimmt man je einen dieser gleichen Teile in den Zirkel und beschreibt abwechselnd unterhalb und oberhalb der geraden Linie Halbkreise, so erhält man die Schlangenlinie (Fig. 32). Warum

Fig. 32.



Digitized by Google

Fig. 33.



wohl so genannt? Bei Gesimsverzierungen findet man öfters solche einfache Schlangenlinien. Man nennt sie Karnieslinien (Fig. 33).

2. Man ziehe gleich weit von einander drei horizontale Parallelen (Fig. 34) ab, cd und gf, trage auf denselben gleiche Strecken ab und verbinde die gegenüberliegenden Schnittpunkte durch die Senkrechten. Nun ziehe man die Linie cm und beschreibe mit ihr abwechselnd aus dem je zweiten unteren und oberen Teilungspunkte, hier aus m, n, o und p, Kreisbogen um die Mittellinie, so ist eine Wellenlinie entstanden.

Fig. 34.

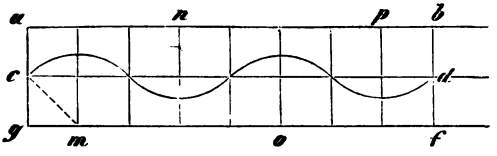
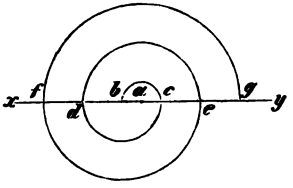


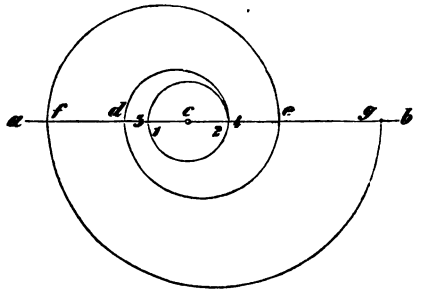
Fig. 35.



[3. Man ziehe (Fig. 35) eine gerade Linie xy, nehme ungefähr in der Mitte derselben einen Punkt a an und beschreibe mit kleiner Zirkelöffnung den Halbkreis bc oberhalb der Linie, nehme dann bc in den Zirkel und beschreibe von b aus den Halbkreis cd unterhalb der Linie; sodann beschreibe man von a aus mit der Zirkelöffnung ad den Bogen de oberhalb, aus b mit der Zirkelöffnung be den Bogen ef unterhalb der Linie und fahre in dieser Weise fort, abwechselnd aus a und b Halbkreise über und unter der Linie zu ziehen. Man erhält auf diese Weise die Spirale aus Halbkreisen oder die Federwindung.]

[4. Die vorige Windung war eine Federwindung, bei welcher die Bogen parallel liefen. Es giebt aber auch Spiralen mit auseinandergehenden (divergenten) Bogen (Fig. 36). Man nennt dieselben auch Schneckenwindungen. Um eine solche Spirale zu zeichnen, schlägt man folgendes Verfahren ein: Man zieht eine gerade Linie ab, bestimmt in derselben beliebig einen Punkt c und trägt von diesem Punkte aus auf beiden Seiten gleichviel kleine, gleiche Teile ab, z. B. c1, c2, 1. 3, 2. 4. Nun setzt man den Zirkel in c ein und beschreibt mit der Zirkelöffnung c3 eine Kreis-

Fig. 36.

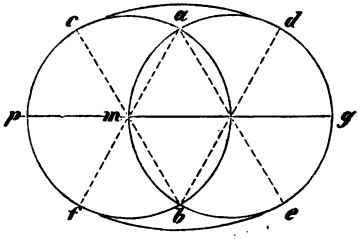


Digitized by Google

linie (das Auge). Hierauf beschreibt man abwechselnd unterhalb und oberhalb der geraden Linie aus 1 mit der Zirkelöffnung 1—4 den Halbkreis d4, aus 2 mit der Zirkelöffnung 2d den Halbkreis de, aus 3 mit der Zirkelöffnung 3e den Halkreis ef, aus 4 mit der Zirkelöffnung 4f den Bogen fg u. s. w. Je größer die Spirale werden soll, desto größer muß der Durchmesser des Kreises um c sein, und so viel Umdrehungen dieselbe haben soll, so viel Teile muß man rechts und links von c setzen. Spirallinien findet man bei den Windungen eines Schneckenhauses, der Spiralfeder einer Taschenuhr, den Spiralwindungen am Weinstock, am Hopfen, an den Wicken, den Alpenveilchen; auch findet man sie öfters als Zierat an Säulen (z. B. die Voluta am ionischen Kapitäl).]

5. Die länglich-runde Linie (die Ellipse), wie man sie zu manchen Schildern hat, und wie sie die Böttcher beim Zeichnen des Bodens länglich-runder Gefäße brauchen (Fig. 37), läßt sich ebenfalls mit Hilfe des Zirkels bilden. Man zieht zunächst eine gerade Linie, setzt in einem beliebigen Punkte derselben ein und beschreibt einen Kreis von beliebiger Größe um n mit mn. Da, wo der Kreis die Gerade durchschneidet (hier in m), setzt man mit der vorigen Zirkelöffnung wieder ein und zieht einen zweiten Kreis. Hierauf setzt man die Zirkelspitze in b ein und schlägt mit der Zirkelöffnung bc den Bogen cd, dann auch von a aus den Bogen fe; so ist pcdgefp die verlangte Linie.

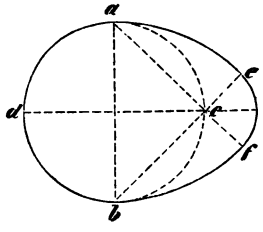
Fig. 37.



Bemerk.: Die mathematisch genaue Ellipse ist von der hier angegebenen wesentlich verschieden, da ihre Peripherie selbst in den kleinsten Teilen niemals mit einem Kreisbogen sich decken darf, während die hier sogenannte Ellipse in Fig. 37 nur aus Teilen verschiedener Kreislinien zusammengesetzt ist. Über die Entstehung und das Wesen der wahren Ellipse siehe § 68.

6. Eine andere krumme Linie ist die Eilinie (das Oval, Eirund) (Fig. 38). Warum wohl so genannt? Um sie zu zeichnen, beschreibe man einen Kreis und ziehe die sich rechtwinkelig schneidenden Durchmesser ab und cd. Nach dem einen Endpunkt c ziehe man die Sehnen ac und bc, welche man über c hinaus verlängert, beschreibe dann aus a mit der Zirkelweite ab den Bogen bf, aus b mit derselben Weite den Bogen ae und vollende endlich aus c mit der Zirkelweite ce = cf das Oval adbfea, indem man den Verbindungsbogen ef zieht.

Fig. 38.

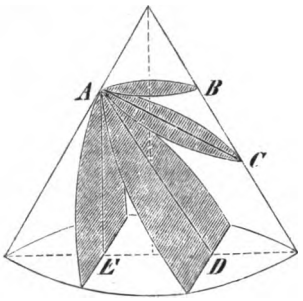


7. Andere regelmäßig krumme Linien erhält man, wenn man eine Möhre, den Stamm einer Weißtanne, einen Zuckerhut ꝛc. durchschneidet

Digitized by Google

(Fig. 39). Man nennt sie, da die erwähnten Körper in der Geometrie Kegel genannt werden, Kegelschnitte. Dieselben sind folgende: 1. Der Kreis AB; er entsteht, wenn man einen geraden Kegel (eine Möhre) parallel zur Grundfläche durchschneidet. 2. Die Ellipse AC; sie entsteht, wenn der Schnitt schief gegen die Grundfläche geführt, aber so, daß die Grundfläche nicht selbst durchschnitten wird. Wann wird hierbei die Ellipse um so kreisähnlicher? Wenn um so langgezogener? Die meisten Himmelskörper beschreiben elliptische Bahnen, so auch die Erde um die Sonne. 3. Die Parabel AD; sie entsteht dadurch, daß der Schnitt parallel mit der Seitenlinie des Kegels durchgeführt wird. Die beiden „Äste" der Parabel entfernen sich dauernd von der „Achse" AD, bis sie zuletzt derselben fast parallel laufen. Eine Wiedervereinigung findet also hier nie statt. Wagerecht und schräg geworfene Körper bewegen sich in Parabeln, ebenso die Wassertropfen bei Springbrunnen ꝛc. 4. Die Hyperbel AE; sie entsteht dadurch, daß man den Schnitt so führt, daß er nicht durch die Spitze des Kegels und nicht parallel zu einer Seitenlinie geht, sondern so, daß er die Grundfläche durchschneidet und bei weiterer Verlängerung nach oben auch einen aufgesetzten „Scheitelkegel" durchschneiden würde. Auch bei der Hyperbel vereinigen sich die beiden Äste nie, sondern entfernen sich noch schneller von der Achse AE, als bei der Parabel. — Will man zur Veranschaulichung dieser Linien statt einer Möhre einen Holzkegel anwenden, dann dürfte es schon genügen, wenn man denselben ins Wasser oder in eine gefärbte Flüssigkeit taucht, wobei die Benetzungsgrenze die Durchschnittslinie anzeigt.

Fig. 39.



Bemerk.: Das Zeichnen, resp. die geometrische Konstruktion dieser Linien kann von Schülern der Volksschule nicht verlangt werden; es ist genug, daß diese die betreffenden Linien wenigstens durch die Anschauung kennen gelernt haben. In der Gewerbeschule aber ist später die geometrische Darstellung solcher Linien nötig. Dorthin gehört auch die Zeichnung des gotischen Bogens, einer Korblinie, eines Fledermausbogens ꝛc., weil alle diese Linien in der Architektur bei den sogenannten Säulenordnungen ꝛc. vorkommen. — Der Abschnitt von den „Kegelschnitten" kann auch hier bei der Lehre von den Linien noch übergangen und zweckmäßiger erst in der Stereometrie bei der Behandlung des Kegels besprochen werden.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Welche krummen Linien setzen sich aus Teilen der Kreislinien zusammen?
[2. Welche krummen Linien, außer dem Kreise, entstehen bei den Kegelschnitten?]
3. Wo kommen die genannten krummen Linien vor?
4. Zeichne einige Schlangen- und Wellenlinien a) aufwärts, b) seitwärts, c) schräg!

Digitized by Google

5. Zeichne eine Schneckenlinie, eine länglich-runde Linie und ein Oval!
[6. Bilde an einem wirklich kegelförmigen Körper die Kegelschnitte!]
[7. Zeichne einen Kegel mit den Kegelschnitten perspektivisch!]

Zweiter Abschnitt.

Kapitel 3.

Von den Winkeln.

§ 17. Entstehung, Wesen und Bezeichnung der Winkel.

Der Lehrer knüpft an den Ausdruck „Winkel" an, unter welchem wir in der Stube den Raum zwischen zwei anstoßenden Wänden verstehen. Er zeigt an den Begrenzungsflächen geometrischer Körper (Würfel ꝛc.) einzelne Winkel und zeichnet endlich auch einen Winkel an, indem er zwei sich schneidende Linien zieht. Die Kinder erkennen, daß in allen drei Fällen der Winkel *entsteht*, wenn sich zwei Linien in einem Punkte treffen. — Man bilde ferner mit Hilfe zweier Stäbe oder mit den Schenkeln des Zirkels verschiedene Winkel. Wenn sich also eine Gerade um einen ihrer Endpunkte dreht (in Fig. 40 BC um Punkt C, bis sie in die Lage von AB fällt), so *entsteht* auch ein Winkel.

Ein Winkel ist also die Drehung der bewegten Linie oder die Neigung beider Linien zu einander oder der *Richtungsunterschied beider Linien*.

Die beiden Linien, welche den Winkel bilden, heißen seine *Schenkel*, ihr Schnittpunkt ist der *Scheitel*.

Man benennt einen Winkel, den man auf das Papier zeichnet, entweder mit drei Buchstaben, wobei dann der Buchstabe des Scheitels in die Mitte kommt, oder nur mit *einem* am Scheitel — innen oder außen — stehenden Buchstaben. Es kann also der obenstehende Winkel (Fig. 40) ABC oder CBA genannt werden, er kann aber auch kürzer B heißen. Für das Wort Winkel setzt man oft das Zeichen ∠.

Fig. 40.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie *entsteht* ein Winkel? Wie nennt man die Linien, die ihn bilden?
2. Was *ist* ein Winkel?
3. Wie *liest* man einen Winkel?
4. Zeichne einzelne Winkel und lies sie auf verschiedene Weise!

§ 18. Größe und Arten der Winkel.

Ist die Drehung des einen Schenkels (am Zirkel zeigen!) vom andern nur eine geringe, so bilden sie nur einen *kleinen* Winkel. Je mehr

Digitized by Google

ich aber den einen Schenkel vom andern hinweg drehe, desto größer wird der Winkel. Die Drehung und somit die Größe des Winkels bleibt dieselbe, wenn ich an die Schenkel noch ein Stück ansetze oder wenn ich von denselben ein Stück abbrechen würde. Bilde mit zwei kleineren Stäben (Bleistiften) denselben Winkel wie hier am Zirkel, indem du den einen Stab vom andern aus dieselbe Drehung machen läßt. Verlängere beide Schenkel des an der Tafel angezeichneten Winkels! Verkürze sie! Daraus geht hervor: Die Größe eines Winkels richtet sich nicht nach der Länge der Schenkel, sondern hängt nur von der Drehung des einen Schenkels (oder vom Richtungsunterschiede beider) ab.

Ihrer Größe nach unterscheidet man folgende Winkelarten, die der Lehrer am bequemsten am Zirkel veranschaulicht:

1. Der gestreckte Winkel (Fig. 41) entsteht, wenn der bewegliche Schenkel eine halbe Umdrehung gemacht hat, wenn also die beiden Schenkel eine gerade Linie bilden. (Arme eines Wegweisers.) Bei welchem vollen Stundenschlage bilden die Uhrzeiger einen gestreckten Winkel?

Fig. 41.

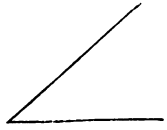
2. Der rechte Winkel (Fig. 42) entsteht, wenn der bewegliche Schenkel eine Viertel-Umdrehung gemacht hat; er ist also die Hälfte eines gestreckten Winkels und umgekehrt der gestreckte doppelt so groß als der rechte (= 2 R). Beim rechten Winkel stehen die Schenkel so zu einander, wie die senkrechte zur wagerechten Linie. Die meisten Gegenstände im Zimmer zeigen rechte Winkel. Wann bilden die Uhrzeiger 1 R? Wozu brauchen die Zimmerleute den rechten Winkel und Winkelhaken? Welche Handwerker brauchen ihn ebenfalls?

Fig. 42.

Die Bauleute machen sich, wenn sie gerade kein Winkelmaß haben, auch auf die Weise einen rechten Winkel, daß sie drei Stangen, von denen die eine drei, die andere vier, die dritte fünf Teile mißt, mit ihren Endpunkten aneinander fügen, wodurch ein rechtwinkliges Dreieck entsteht. Dieses Verfahren gründet sich auf einen Lehrsatz, von welchem später die Rede sein wird. (S. den pythagoreischen Lehrsatz.)

3. Macht der Schenkel weniger als eine Viertel-Umdrehung, so entsteht ein spitzer Winkel. Dieser ist daher ein Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist. (Fig. 43.)

Fig. 43.



4. Beträgt die Drehung des Schenkels mehr als eine Viertel-, aber weniger als eine halbe Umdrehung, so nennt man den Winkel einen stumpfen (Fig. 44). Ein stumpfer Winkel ist daher ein solcher, welcher größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter Winkel ist.

Fig. 44.

Spitze und stumpfe Winkel heißen im Gegensatz zum rechten Winkel schiefe Winkel. (Recht- und schiefwinklig.) Rechte, spitze und stumpfe heißen wieder mit einem gemeinsamen Namen hohle oder konkave Winkel; Winkel, die

Digitized by Google

größer als ein gestreckter sind, dagegen erhabene oder konvexe (Fig. 45). Letztere können in der Volksschule ganz übergangen werden.

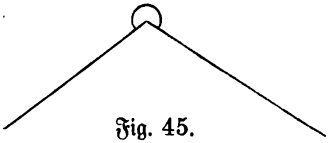


Fig. 45.

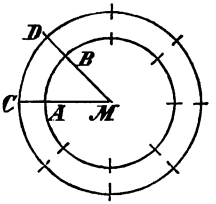
Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Teile die Winkel nach ihrer Größe ein und gieb die Begriffserklärungen dazu an!
2. Wann bilden die Uhrzeiger gestreckte, rechte, spitze, stumpfe Winkel?
3. Nenne Straßen, welche die genannten Winkel mit einander bilden!
4. Wie kann man an einem Taschenmesser, wie mit dem Unter- und Oberarm die vier Winkelarten darstellen?
5. Wie sind alle gestreckten Winkel untereinander? alle rechten Winkel? Gilt dies auch von allen spitzen und von allen stumpfen Winkeln?
6. Zeichne — nach dem Augenmaß — die vier Winkelarten in verschiedener Lage, mit der Winkelöffnung nach rechts oben und unten, links oben und unten!
7. Zeichne rechte Winkel mit dem Winkelhaken oder mit dem Winkeldreieck an eine wagerechte, senkrechte und schräge Linie nach rechts und links!

§ 19. Der Transporteur und seine Anwendung zum Messen der Winkel.

Da die spitzen und stumpfen Winkel von sehr verschiedener Größe sein können, so muß zur näheren Bestimmung derselben noch eine Messung vorgenommen werden. Dies kann nicht mittels eines Linienmaßes geschehen, da ja die Größe nicht von der Länge der Schenkel abhängt. Da vielmehr die Größe eines Winkels durch die Drehung des einen Schenkels bestimmt wird, so haben wir in dieser oder — was dasselbe ist — in dem Kreisbogen, der sich zwischen den Schenkeln um den Scheitel des Winkels schlagen läßt, ein Maß für den Winkel. Und zwar kommt es nicht auf die Länge des Bogens an, sondern nur darauf, welcher Teil derselbe vom ganzen Kreisumfange ist. So umspannt der gestreckte Winkel stets einen Halbkreis, der rechte stets einen Viertelkreis, der spitze weniger und der stumpfe mehr als einen Viertelkreis. Um die verschiedenen spitzen und stumpfen Winkel nun genauer zu messen, denkt man sich den ganzen Kreis in 360 gleiche Teile, Grade (°), zerlegt und sieht zu, wieviel solcher Grade von dem Winkel eingeschlossen werden. Hierbei ist es gleichgültig, ob man dazu einen größeren oder kleineren Kreis verwendet. Wenn z. B. in Fig. 46 der halbe rechte Winkel AMB $^1/_8$ des inneren Kreises oder 45° umspannt, so faßt er auch vom äußeren Kreise $^1/_8$ oder 45°.

Fig. 46.

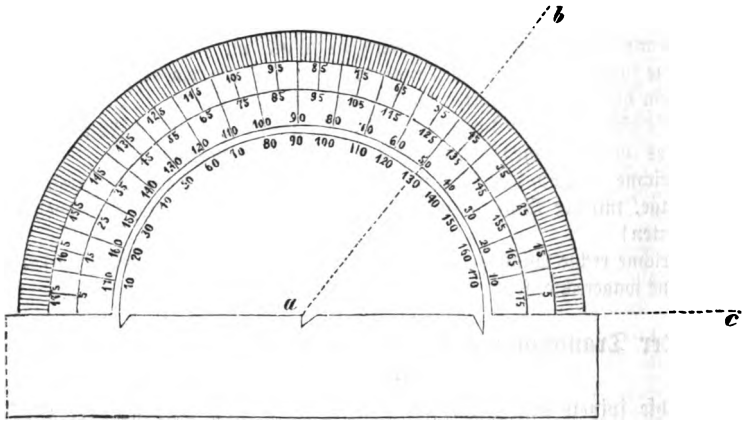


Wie viel Grad kommen stets auf einen gestreckten? einen rechten Winkel? Zwischen welchen Gradzahlen liegt die Größe jedes stumpfen Winkels?

Digitized by Google

Ein bekanntes Hilfsmittel zum Messen der Winkel ist der Winkelmesser, gewöhnlich Transporteur genannt (Fig. 47), weil er auch zum Übertragen (Transportieren) der Winkel dient. Dieser ist ein in 180° geteilter halber Kreisring, an dessen Durchmesser sich ein Lineal mit einem Einschnitt am Mittelpunkt des Halbkreises anlehnt. Die Zählung der Grade ist in doppelter Weise ausgeführt, von rechts nach links und umgekehrt, um sowohl Winkel, die nach rechts, als auch solche, die nach links geöffnet sind, messen zu können.

Fig. 47.



Wie verfährt man nun beim Messen mit dem Transporteur, z. B. beim ∠ bac (Fig. 47)? Man legt das Lineal des Transporteurs an den Schenkel ac so an, daß der (durch die rechtwinklige Ecke des Einschnittes bezeichnete) Kreismittelpunkt auf den Scheitelpunkt a fällt. Der andere Schenkel ab zeigt dann die Gradzahl an. Da der Winkel nach rechts geöffnet ist, so ist die von rechts ausgehende Zählung zu benutzen; der Winkel mißt also 50°. Woraus kannst du auch schon schließen, daß die Zahl 130° nicht für den ∠ bac gelten kann? (Zu noch genaueren Messungen, wie sie z. B. die Astronomen vornehmen müssen, reichen die Grade nicht aus; deshalb wird der Grad noch in 60 Minuten [′], die Minute wieder in 60 Sekunden [″] geteilt.)

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wodurch wird ein Winkel gemessen?
2. Beschreibe die Einrichtung des Transporteurs und seine Anwendung zum Winkelmessen!
3. Wieviel Grad hat $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{3}$ R, $\frac{2}{3}$ R, $1\frac{1}{2}$ R?
4. Schneide den Transporteur aus: Kehr, „Geometrische Rechenaufgaben", und klebe ihn auf Pappe, oder fertige dir selbst einen solchen (mit Hilfe eines andern Transporteurs) an!
5. Zeichne verschiedene spitze und stumpfe Winkel, die nach rechts oben und unten, nach links oben und unten geöffnet sind, schätze ihre Größe ab und miß sodann mit dem Transporteur nach!

Digitized by Google

6. Den wievielten Teil eines Kreises umspannt ein Winkel von 40°, 1°, 7° (1′, 1″, 1° 48′ 48″)?
7. Bei Landstraßen soll die Neigung nicht über $^1/_{47}$, bei Eisenbahnen nicht über $^1/_{474}$ eines rechten Winkels betragen. Wieviel macht dies in Graden, Minuten und Sekunden?
[8. Wieviel Grad beträgt die Neigung der Erdachse gegen die Erdbahn, die Abweichung der Magnetnadel von der Richtung des Meridians — die Deklination —, die Neigung des Himmelsäquators zu deinem Horizonte?]
9. Miß den „Sehwinkel", unter welchem dir verschiedene Gegenstände in bestimmter Entfernung erscheinen, indem du vom (rechten) Auge aus Linien nach zwei äußersten Punkten des Gegenstandes ziehst! Wie wird dieser Winkel, wenn du dich dem Gegenstande näherst?

§ 20. Weitere Anwendung des Transporteurs zu verschiedenen Winkelkonstruktionen.

1. Mit Hilfe des Transporteurs einen Winkel von bestimmter Größe zu zeichnen, z. B. einen ∠ von 50° (Fig. 47): Lege das Lineal des Transporteurs so auf die Linie ac, an welche der Winkel angetragen werden soll, daß der Kreismittelpunkt auf den Punkt a, welcher Scheitelpunkt werden soll, fällt. Bezeichne die Stelle n des Transporteurs, an welcher die Zahl 50 steht (vom gegebenen Schenkel am, also hier von rechts aus gezählt) und verbinde diesen Punkt n mit a, so ist ∠ bac der verlangte.

2. Einen gegebenen Winkel an einer Linie in einem bestimmten Punkte anzutragen: Miß zuerst den Winkel und verfahre dann wie bei voriger Aufgabe.

Bemerk.: Handwerker bedienen sich zur Abtragung von Winkeln gewöhnlich der Schmiege, die aus 2 durch eine Schraube beweglich verbundenen Linealen besteht.

3. Die Summe oder Differenz zweier Winkel, sowie ein bestimmtes Vielfaches eines gegebenen Winkels läßt sich ebenfalls leicht mit dem Transporteur darstellen, indem man die Winkel mißt, die gefundenen Gradzahlen addiert, subtrahiert, bzw. multipliziert und dann einen Winkel von der erhaltenen Gradzahl zeichnet.

4. Mittels des Transporteurs läßt sich endlich auch jeder Winkel in jede beliebige Anzahl gleicher Teile teilen. Man mißt den Winkel, dividiert die Gradzahl durch die vorgeschriebene Anzahl der Teile und trägt Winkel von der berechneten Größe vom gegebenen Winkel ab.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wobei findet der Transporteur seine Anwendung?
2. Zeichne Winkel von 53°, 116° ꝛc. in verschiedener Lage!
3. Trage gegebene Winkel mit dem Transporteur an senkrechte, wagerechte und schräge Linien nach verschiedenen Richtungen an!
4. Stelle die Summe zweier Winkel, ihre Differenz und das Dreifache eines gegeben Winkels dar!
5. Teile einen gegebenen Winkel in fünf gleiche Teile!

Digitized by Google

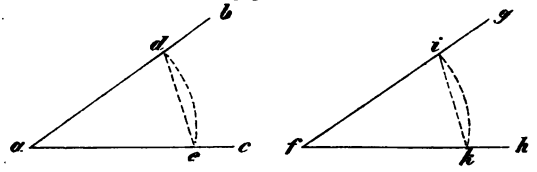
§ 21. Verschiedene Winkelkonstruktionen ohne Transporteur.

Die vier Aufgaben in § 20 lassen sich zum Teil auch ohne Transporteur lösen:

1. Winkel von bestimmter Größe können nur in einzelnen Fällen ohne Transporteur, auf geometrischem Wege — d. i. nur unter Anwendung von Lineal und Zirkel — gezeichnet werden, so der rechte Winkel und einzelne Teile desselben, wie $^1/_2$ R, $^1/_4$ R, $^2/_3$ R, $1\frac{1}{3}$ R, $^1/_3$ R 2c. Der rechte Winkel ist bereits mit Winkelhaken oder Winkeldreieck gezeichnet worden. Wie man ihn ohne diese Hilfsmittel auf Grund der Gesetze über die gleichseitigen oder gleichschenkligen Dreiecke oder über die Winkel im Kreise konstruieren kann, siehe bei den betr. Paragraphen. Die Zeichnung eines Winkels von 60°, 120°, 30° 2c. erklärt sich auch erst aus der Bekanntschaft mit dem gleichseitigen Dreieck.

2. Einen gegebenen Winkel, z. B. bac (Fig. 48), in Punkt f an Linie fk anzutragen: Da der Winkel durch den Kreisbogen bestimmt wird, so schlage man zwischen den Schenkeln des Winkels bac um a einen Kreisbogen de, desgleichen mit derselben Zirkelöffnung von f aus. Damit nun der Bogen = de wird, messe man denselben (durch die Sehne de), trage diese Zirkelöffnung von k aus auf dem Bogen ab und verbinde den Schnittpunkt i mit f, so ist ∠ ifk = bac, da beide Winkel gleiche Bogen gleicher Kreise umspannen.

Fig. 48.



3. Winkel zu addieren, zu subtrahieren oder zu multiplizieren. Es bedarf kaum einer weiteren Auseinandersetzung, daß die Aufgabe, „einen Winkel zu zeichnen, der so groß ist wie drei gegebene", nur einfach der Zusammensetzung dieser drei Winkel in einem Scheitel bedarf (Fig. 49). Ebenso leicht ist das Abziehen und Vervielfältigen der Winkel.

Fig. 49.

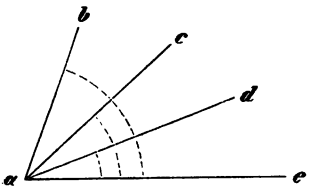
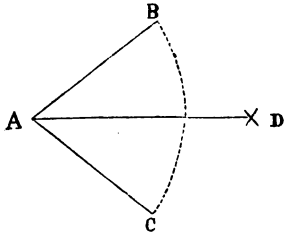


Fig. 50.



4. Von den Teilungen des Winkels ist ohne Transporteur nur die Halbierung eines jeden Winkels ausführbar. Da diese häufiger gebraucht wird, so möge sie hier bereits ihre Stelle finden, obgleich die Begründung erst später, in § 34, erfolgen kann. Um den Winkel BAC (Fig. 50) zu halbieren, schlage man aus dem Scheitel A mit beliebiger Zirkelweite einen Bogen, so daß AB = AC werde. Von B und C aus schlage man mit gleicher Zirkelöffnung Kreuzbogen und ziehe von deren

Digitized by Google

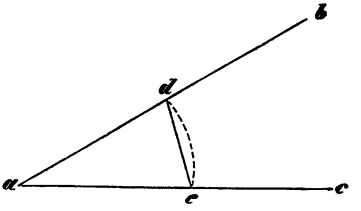
Durchschnittspunkt D die Gerade AD, so halbiert diese den gegebenen Winkel. (Will man den Winkel in vier gleiche Teile teilen, so halbiert man wiederum die Hälften ꝛc.)

[§ 22. Vom Messen der Winkel auf dem Felde.

Der Transporteur kann nicht zum Messen von Winkeln auf dem Felde gebraucht werden (warum nicht?); man hat dazu deshalb andere Instrumente.

Einen Winkel auf dem Felde kann man mit der Meßkette bestimmen. Man mißt nämlich (Fig. 51) von den beiden Schenkeln des Winkels eine gleiche Länge (etwa 3 m) und bezeichnet die betreffenden Punkte d und e mit Stangen. Sodann mißt man die Entfernung der beiden Punkte d und e und notiert sich die Längenmaße von ad, ae und de. Zeichnet man dann mit Hilfe des Zirkels und des verjüngten Maßstabes die Entfernungen ad, de und ae als Dreieck auf das Papier, so kann man mit Hilfe des Transporteurs die Größe des Winkels bestimmen. (S. Kongruenz der Dreiecke, 3. Fall.)

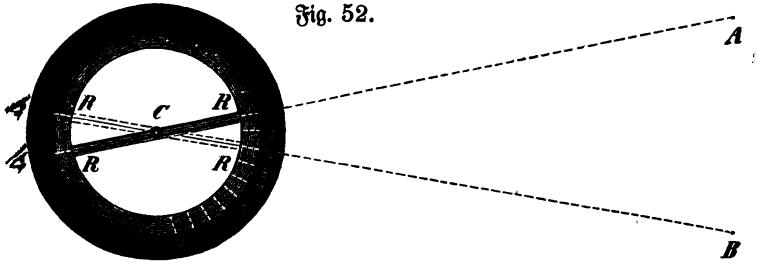
Fig. 51.



Bequemer ist freilich die Anwendung des Winkelkreuzes, das man sich in seiner einfachsten Gestalt verfertigen kann, wenn man zwei lange, aber dünne Lineale kreuzweise übereinanderlegt und sie in der Mitte durch eine Schraube so verbindet, daß man sie beliebig hin- und herbewegen kann. Stellt man nun das Winkelkreuz auf einem Stabe auf und bringt man durch Visieren die beiden Lineale in die Richtung zweier aneinanderliegenden Seiten des Ackerstückes (im Scheitelpunkte von Länge und Breite), so kann man dann mit einer Schmiege, die man zwischen die Lineale einpaßt, die Größe des Winkels leicht bestimmen. (Weiteres darüber s. Wölfer, Der praktische Forst- und Feldmesser. Ferner: Wiegand, Feldmeßkunde; Schlieben a. a. O.)

Es liegt in der Natur der Sache, daß der Geometer vom Fache genauere Bestimmungen bei der Handhabung des Winkelkreuzes haben muß (vor allem Okular- und Objektivdiopter); allein für unsere Zwecke genügt schon das Winkelkreuz in der obigen einfachsten Gestalt. Besser ist freilich das in Fig. 52 dargestellte Instrument zum Winkel-

Fig. 52.



Digitized by Google

messen. Es besteht aus einem Metallring, dessen Rand in Grade geteilt ist (Limbus). Im Mittelpunkte C ist ein Stift, um welchen ein Stab RR (die Regel genannt) wie der Zeiger auf dem Zifferblatte einer Uhr gedreht werden kann. Das Instrument wird nun auf einem Tische wagerecht aufgestellt, und zwar so, daß C senkrecht über der Stelle aufgestellt wird, wo sich die Linien A und B schneiden (am Scheitel des zu messenden Winkels). Nun richtet man die Regel auf 0°, und dann nach der Richtung des anderen Schenkels B. Im vorliegenden Falle ergiebt sich, daß der Winkel 20° beträgt.

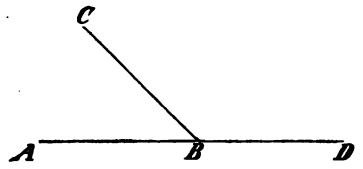
Aufgaben.

1. Miß im Freien einige Winkel mittelst der Meßkette, des Winkelkreuzes oder des Limbus!
2. Stecke im Freien einige Winkel von bestimmter Größe ab!

§ 23. Winkelgruppen an einem gemeinsamen Scheitelpunkte.

I. Nebenwinkel. Wenn man den Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, so entsteht neben ersterem ein zweiter Winkel, den man seinen Nebenwinkel nennt. — Eine Straße bildet mit ihrem Seitengäßchen, ein Baum mit dem Erdboden Nebenwinkel ꝛc. — Nenne von jedem der beiden Nebenwinkel in Fig. 53 den Scheitelpunkt! die beiden Schenkel! Was haben sie gemeinsam? Was bilden die nicht gemeinschaftlichen Schenkel? Also: Nebenwinkel sind zwei Winkel, die den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam haben und deren andere (nicht gemeinschaftliche) Schenkel eine gerade Linie bilden. — Was für einen Winkel bilden ∠ ABC und CBD zusammen? Wieviel R oder Grad hat derselbe?

Fig. 53.



Also Gesetz: Nebenwinkel betragen zusammen 2 R oder 180°. — Der eine Winkel ergänzt den andern zu 2 R, er ist sein „Supplement“ (d. i. eben Ergänzungswinkel zu 180°, während der Ergänzungswinkel zu 90° das „Komplement“ genannt wird).

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Beantworte die Fragen nach der Entstehung, dem Wesen (Erklärung), dem Vorkommen und dem Gesetz der Nebenwinkel!
2. Was für einen Nebenwinkel hat ein rechter, ein spitzer, ein stumpfer Winkel?
3. Wie groß ist jeder von zwei gleichen Nebenwinkeln?
4. Wie sind die Nebenwinkel von zwei gleichen Winkeln?
5. Welcher von zwei ungleichen Winkeln hat den größeren Nebenwinkel?
6. Wie groß sind beide Nebenwinkel einzeln: a) wenn der eine 67° beträgt, b) wenn sich beide = 3:7 verhalten, c) wenn der eine um 42° größer ist als der andere?

Digitized by Google

[7. Wie groß ist: a) das Supplement, b) das Komplement eines Winkels von 78°?]

8. Zeichne die Winkelpaare von Aufgabe 6 und 7 mit dem Transporteur!

9. Miß von außen den Winkel, den zwei Mauern miteinander bilden, indem du durch Anlegen eines Lineals an die eine Mauer den Nebenwinkel bildest, diesen mißt und dann von 180° abziehst! (Fig. 54.)

II. **Scheitelwinkel.** 1. **Entstehung und Wesen:** Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus, so wird der von den Verlängerungen gebildete Winkel **Scheitelwinkel** des ersteren genannt. — Schere, Kreuzweg, Fensterkreuz ꝛc.

Fig. 54.

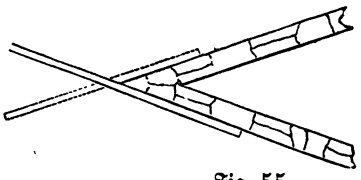
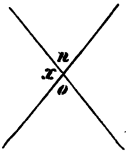


Fig. 55.



Zeige von den beiden Scheitelwinkeln n und o in Fig. 55 den Scheitel! die Schenkel! Also: Scheitelwinkel sind zwei Winkel, die den Scheitelpunkt gemeinsam haben und deren Schenkel paarweise gerade Linien bilden.

2. **Gesetz:** a) **Veranschaulichung:** Miß beide Scheitelwinkel! Schneide die Figur der Scheitelwinkel in Papier aus und lege die Winkel aufeinander! Was findest du auf beiderlei Weise? Also: **Gesetz:** Scheitelwinkel sind einander gleich.

b) **Begründung:** Wir wollen sehen, **warum** dies so sein **muß**. Beide Winkel sind die Neben- oder Supplementswinkel von ∠ x, **müssen** daher gleich groß sein (§ 23, I, Aufg. 4). Hat z. B. ∠ x 110°, so ist ∠ n als Nebenwinkel 70°, ∠ o desgleichen, also sind beide gleich.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Sprich über Entstehung, Wesen, Vorkommen und Gesetz von den Scheitelwinkeln!
2. Was für einen Scheitelwinkel hat ein rechter, spitzer, stumpfer Winkel?
3. Was für Scheitelwinkel haben gleiche Winkel?
4. Zeichne die Winkelpaare von Aufgabe 2!
5. Miß von außen den Winkel, den zwei Mauern miteinander bilden, indem du an **beide** Wände Latten legst und den so entstandenen Scheitelwinkel mißt! (Fig. 54.)

III. **Winkel um einen Punkt herum.** Liegen mehrere Winkel vollständig um einen Punkt herum, so umspannen sie zusammen einen **vollen** Kreis, betragen also zusammen 360°. Oder wenn man durch den Scheitelpunkt irgend eine Gerade legt, so bilden die Winkel auf jeder Seite derselben einen gestreckten = 2 R, betragen daher zusammen 4 R = 360°. **Gesetz?**

Aufgaben.

1. a) Wieviel gestreckte, b) stumpfe, c) rechte Winkel können nur um einen Punkt herum liegen? d) Wieviel spitze Winkel müssen es mindestens sein?

Digitized by Google

2. Wie groß ist jeder von 3, 5, 6, 8, 10 gleichen Winkeln um einen Punkt herum? $\left(\text{Bei n gleichen Winkeln } \frac{4}{n} R = \frac{360°}{n}.\right)$

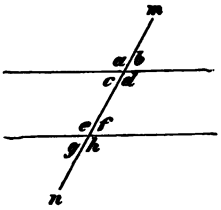
3. Wie groß sind die fünf Winkel um einen Punkt herum, wenn sich dieselben wie 2 : 3 : 4 : 5 : 6 verhalten?

4. Zeichne die Figuren zu Aufgabe 2 mit dem Transporteur!

§ 24. Winkel an durchschnittenen Parallelen*).

Wenn zwei parallele (∥) Linien von einer dritten Linie durchschnitten werden, so entstehen an jedem der beiden Schnittpunkte vier, zusammen also acht Winkel (Fig. 56). Nenne von jedem Scheitelpunkte die vier Nebenwinkel- und die beiden Scheitelwinkelpaare! Jetzt wollen wir je zwei Winkel von verschiedenen Scheitelpunkten paarweise zusammenstellen.

Fig. 56.



1. Gegenwinkel: ∠ a und e liegen beide auf derselben (linken) Seite der Durchschneidenden m n, der eine innerhalb, der andere außerhalb der Parallelen. Sie heißen Gegenwinkel (oder auch, weil sie in Beziehung zu ihren Scheitelpunkten dieselbe Lage haben, hier jeder nach links oben gerichtet, korrespondierende oder gleichliegende Winkel). Gegenwinkel sind also ein innerer und ein äußerer Winkel auf derselben Seite der Durchschneidenden. Nenne noch drei andere Gegenwinkelpaare! — Durch gleichmäßiges Heraufschieben der unteren Parallelen bis auf die obere, oder dadurch, daß man aus Papier den unteren Teil der Figur ausschneidet und mit dem Scheitelpunkt auf den oberen legt, finden die Kinder das Gesetz: Gegenwinkel an Parallelen sind einander gleich. — Dies hat seinen Grund darin, daß die obere Parallele mit der unteren gleiche Richtung hat, also auch zur Durchschneidenden gleich geneigt sein oder gleiche Richtungsunterschiede, d. i. aber gleiche Winkel bilden muß.

2. Wechselwinkel: ∠ c und f liegen auf verschiedenen Seiten der Durchschneidenden, aber beide innerhalb der Parallelen. Wechselwinkel sind zwei innere oder zwei äußere Winkel auf verschiedenen Seiten der Durchschneidenden. Nenne das andere Paar innerer und zwei Paar äußere Wechselwinkel!

Da ∠ c = b als Scheitelwinkel und auch
∠ f = b als Gegenwinkel ist, so müssen die beiden selbst unter einander gleich sein. Suche für die äußeren Wechselwinkel a und h einen dritten Winkel, dem beide gleich sind! Gesetz: Wechselwinkel an Parallelen sind einander gleich.

3. Entgegengesetzte Winkel: ∠ b und h liegen auf der-

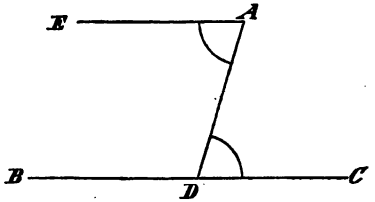
*) Für einfache Schulverhältnisse genügt es, wenn von den Winkeln an Parallelen gezeigt wird, daß die gleichgelegenen Winkel an beiden Scheitelpunkten einander gleich sind, daß man daher aus einem dieser 8 Winkel die andern 7 berechnen kann.

Digitized by Google

selben Seite der Durchschneidenden und beide außerhalb der Parallelen. Entgegengesetzte Winkel sind zwei äußere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der Durchschneidenden. Nenne das andere Paar äußere und zwei Paar innere entgegengesetzte Winkel! — ∠ b beträgt mit d als Nebenwinkel zusammen 2 R. Da ich für ∠ d auch den gleichen Gegenwinkel h setzen kann, so beträgt b auch mit h zusammen 2 R. — Gesetz: Entgegengesetzte Winkel an Parallelen betragen zusammen 2 R.

4. Nur für Winkel an durchschnittenen Parallelen gelten diese drei Gesetze. Darum kann man auch umgekehrt schließen: Wenn zwei Gegenwinkel gleich sind, wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, oder wenn zwei entgegengesetzte Winkel 2 R betragen, so müssen die Linien, an denen sie liegen, parallel sein. — Darauf beruht eine Lösung der Aufgabe: Durch einen Punkt zu einer gegebenen Linie eine Parallele zu ziehen. Verbinde Punkt A (Fig. 57) mit einem Punkte der gegebenen Linie BC, etwa D, trage den dadurch entstandenen Winkel ADC in A an AD nach der entgegengesetzten Seite an, so daß er also der innere Wechselwinkel zu ADC wird, dann muß sein Schenkel AE der Linie BC parallel sein.

Fig. 57.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was sind Gegenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzte Winkel an Parallelen?
2. Nenne Gegenstände, an denen dieselben vorkommen!
3. Welche von den genannten Winkeln sind gleich; welche betragen 2 R?
4. Zeichne die Fig. 56 so, daß die Durchschneidende wagerecht liegt, und stelle die verschiedenen Winkelpaare zusammen!
5. Miß von den acht Winkeln dieser Figur einen und schließe daraus auf die Größe der sieben anderen!
6. Ziehe (mit Hilfe der inneren Wechselwinkel) durch einen Punkt Parallele zu Linien verschiedener Richtung!

Dritter Abschnitt.

Von den geradlinigen Figuren.

---

§ 25. Allgemeines über die Flächen.

Wie die Fläche entsteht, wovon sie die Grenze bildet und wovon sie selbst wieder begrenzt wird, ist bereits in § 3 behandelt wor-

Digitized by Google

den und würde hier nur zu wiederholen sein. — Der Lehrer zeigt an Gegenständen der Schulstube und an geometrischen Körpern die ebenen und krummen Flächen. (Flächen an Tafel, Wand, Würfel, Pyramide ꝛc. — an Tintenfaß, Globus, Walze, Kegel, Kugel ꝛc.). Zeichne an der Tafelfläche oder auf dem Fußboden von irgend einem Punkte aus nach allen Seiten gerade Linien! Ziehe auf dieser Walzenfläche nach verschiedenen Seiten Linien! Auf der Globusfläche! Also: Auf der ebenen Fläche kann man von jedem Punkte aus nach allen Richtungen gerade Linien ziehen, auf der krummen Fläche nicht (entweder nur in zwei entgegengesetzten Richtungen oder gar nicht). Die Ebene hat keine Erhöhungen oder Vertiefungen, keine „Unebenheiten". Wie prüft daher der Tischler, ob ein Brett eben gehobelt ist? — Die Planimetrie beschäftigt sich nur mit solchen Raumgrößen, die sich in einer Ebene darstellen lassen, daher auch nur mit den ebenen Flächen.

Der Lehrer zeigt verschiedene ebene Flächen an Gegenständen oder geometrischen Körpern und zeichnet einige auch an, etwa ein Viereck, einen Kreis und einen Halbkreis. Von was für Linien wird erstere Figur begrenzt? die zweite? die dritte ꝛc.? Danach teilt man die ebenen Flächen wieder in gerad-, krumm- und gemischtlinige Figuren ein. —

Wir betrachten zunächst die geradlinigen Figuren. Der Lehrer zeigt oder zeichnet ein Drei-, Vier- und Vieleck.

Die geraden Begrenzungslinien dieser Figuren werden Seiten, die Gesamtheit der Seiten der Umfang genannt. Die Scheitelpunkte der Winkel, welche durch die Seiten gebildet werden, heißen (unpassend) Ecken. Zur Bildung einer geradlinigen Figur gehören mindestens drei Seiten, da zwei Linien erst einen noch offenen Winkel bilden. — Nach der Zahl der Seiten zerfallen die geradlinigen Figuren in drei-, vier- und mehrseitige Figuren. Gewöhnlich benennt man sie aber nach der mit der Seitenzahl übereinstimmenden Eckenzahl als Dreiecke, Vierecke und Vielecke.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wodurch unterscheiden sich ebene und krumme Flächen?
2. Nenne Gegenstände, die a) nur von ebenen, b) nur von krummen, c) von beiderlei Flächen begrenzt werden!
3. Gieb von den krummen Flächen folgender Körper an, ob sie uns hohl (konkav) oder erhaben (konvex) erscheinen: Nußschale, Bergkuppe, Thal, Hohlspiegel, Brennglas, Brillenglas für Kurzsichtige!
4. Wie teilt man die ebenen Flächen wieder nach den Begrenzungslinien oder Seiten ein?
5. Zeichne gerad-, krumm- und gemischtlinige Figuren!
6. Wie teilt man die geradlinigen Figuren nach der Seitenzahl ein?
7. Was versteht man unter dem Umfange einer Figur?

Digitized by Google

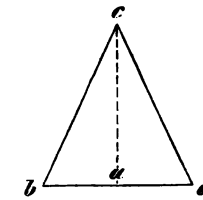
Kapitel 4.

Das Dreieck nach seinen wichtigsten Eigenschaften.

§ 26. Allgemeines vom Dreieck.

An Körpern mit Dreiecken als Begrenzungsflächen, an ausgeschnittenen Papp- oder Papierdreiecken, sowie an angezeichneten Dreiecken erkennen die Kinder, daß ein Dreieck von drei Seiten eingeschlossen wird und drei Winkel enthält. Es wird mit seinen drei Eckbuchstaben in beliebiger Reihenfolge gelesen. Gewöhnlich heißt die untere Seite die Grundlinie, die gegenüberliegende Ecke die Spitze des Dreiecks und eine Senkrechte von der Spitze nach der Grundlinie die Höhe. Da aber das Dreieck so gedreht werden kann, daß irgendeine andere Seite unten zu liegen kommt, so kann jede beliebige Dreiecksseite als Grundlinie aufgefaßt werden.

Fig. 58.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist ein Dreieck?
2. Zeichne ein Dreieck und lies es auf verschiedene Weise!
3. Sieh nacheinander jede der drei Seiten des gezeichneten Dreiecks als Grundlinie an; gieb für jeden einzelnen Fall die Spitze an und zeichne die zugehörige Höhe hinein!

§ 27. Die Winkelsumme im Dreieck.

1. Veranschaulichung: a) Miß die drei Winkel dieses Dreiecks mit dem Transporteur! Addiere die drei Zahlen!

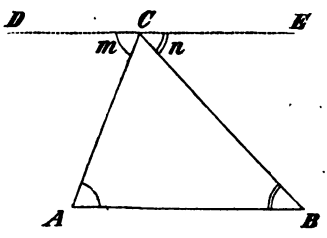
Oder b): ich schneide die drei Winkel eines „Papierdreiecks" ab und lege sie nebeneinander. Was für einen Winkel bilden sie zusammen? Also wieviel Grad?

Oder c): ich ziehe in einem Papierdreieck die Höhe und biege die drei Ecken so um, daß sie genau auf den Fußpunkt der Höhe zu liegen kommen, so bilden die drei nun nebeneinanderliegenden Winkel wieder einen gestreckten Winkel, also 180°.

Gesetz: Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt 180° oder 2 R.

2. Begründung (Fig. 59): Ich lege durch die Spitze C eine Parallele zur Grundlinie AB. Was für einen Winkel bildet dann der Dreieckswinkel C mit den beiden Winkeln m und n zusammen? Wie groß ist also ihre Summe? Was für Winkel an Parallelen bilden ∠ m und A? Diese sind gleich. Welchen Winkel kann ich daher für m setzen? Welchen aus demselben Grunde für n?

Fig. 59.



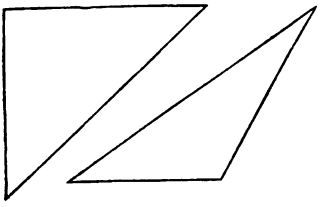
Digitized by Google

Nun erhalte ich statt C + m + n die Summe C + A + B. Wie groß sind daher auch diese drei Winkel zusammen?

3. Folgerungen (von den Schülern auf Fragen des Lehrers selbst zu finden und zu begründen):

a) Ein Dreieck kann nur einen rechten Winkel haben. Was sind die beiden andern, da für sie nur noch 90° bleiben? Ebenso ist nur ein stumpfer Winkel im Dreieck möglich; aber alle drei Winkel können spitze sein. Daraus ergiebt sich die Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln in recht-, stumpf- und spitzwinklige*) Dreiecke (Fig. 60, 61, 59). (Im rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten, welche den rechten ∠ einschließen, die Katheten und die Seite, welche dem rechten ∠ gegenüberliegt, die Hypotenuse.)

Fig. 60. Fig. 61.



b) Ein Winkel im Dreieck bildet zu den beiden andern das Supplement; durch die Größe zweier ist daher der dritte mit bestimmt.

c) Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so müssen sie auch im dritten übereinstimmen.

Beispiel: Der erste ∠ in beiden Dreiecken betrage 50°, der zweite 62°. Wieviel bleibt in beiden Dreiecken für den dritten ∠ übrig?

d) Die beiden spitzen ∠ im rechtwinkligen Dreieck ergänzen sich zu 1 R.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie lautet das Gesetz von der Winkelsumme im Dreieck?
2. Welche Folgerungen kann man aus diesem Gesetze ziehen?
3. Wie teilt man die Dreiecke nach den Winkeln ein? Erkläre diese drei Arten und zeichne sie in verschiedener Lage!
4. Berechne die Winkel eines Dreiecks, wenn a) zwei Winkel 45° und 57° betragen, b) die drei ∠ sich wie 3:5:7 verhalten, c) der zweite ∠ um 20° größer ist als der erste und der dritte um 20° größer als der zweite!
5. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt der eine spitze Winkel 47°; wie groß ist der andere?

§ 28. Der Außenwinkel am Dreieck.

Erklärung: Verlängert man eine Dreiecksseite, so heißt der außen am Dreieck entstehende Winkel Außenwinkel am Dreieck. Er wird also von einer Dreiecksseite und der Verlängerung einer andern gebildet.

Beziehung zum benachbarten Innenwinkel: Der Außen-

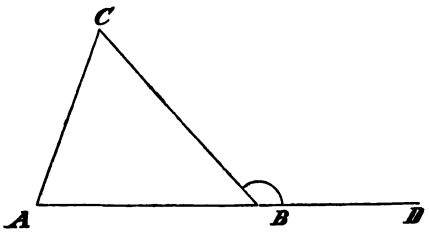
*) Gegen die Rechtschreibung dieser Wörter fehlen die Schüler häufig. Wie heißt das Stammwort? wie daher die Ableitungssilbe?

Digitized by Google

winkel ist der Nebenwinkel des neben ihm liegenden Innenwinkels, ergänzt ihn also zu 2 R.

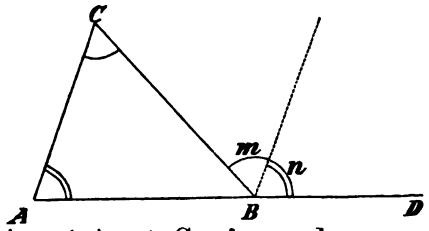
Beziehung zu den beiden gegenüberliegenden Winkeln: In Fig. 62 betrage ∠ A 70°, C 60°. Dann bleibt für ∠ ABC 50°; sein Nebenwinkel CBD muß daher 180—50 = 130° betragen; ebenso groß sind die Winkel A und C zusammen; daher das **Gesetz:** Der Außenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel im Dreieck.

Fig. 62.



[**Allgemeine Begründung:** Ziehe (Fig. 63) aus B zu AC eine Parallele, so wird der Außenwinkel in die beiden Teile m und n zerlegt. Welchem Innenwinkel des Dreiecks ist ∠ m als Wechselwinkel an Parallelen gleich? Welchem ist n gleich? Warum? Also muß der ganze ∠ CBD, der aus m und n besteht, so groß sein wie ∠ A und C zusammen.]

Fig. 63.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie entsteht ein Außenwinkel am Dreieck?
2. Was bildet er zu seinem benachbarten Innenwinkel?
3. Wie verhält er sich zu den gegenüberliegenden Innenwinkeln?
4. Zeichne die drei Außenwinkel eines recht-, stumpf- und spitzwinkligen Dreiecks und gieb an, was es für Winkel sind, z. B.: das stumpfwinklige Dreieck hat einen spitzen und zwei stumpfe Außenwinkel ꝛc.!
5. Ein Außenwinkel am Dreieck beträgt 100°; a) der eine gegenüberliegende Innenwinkel hat 70°; b) die beiden gegenüberliegenden Innenwinkel verhalten sich wie 3:5; c) der eine ist um 15° größer als der andere. Bestimme in allen drei Fällen die Größe der drei Innenwinkel!*)

§ 29. Das Dreieck nach seinen Seiten.

Das Dreieck kann **drei gleiche Seiten, zwei gleiche Seiten** oder drei ungleiche Seiten haben. Man teilt daher die Dreiecke nach

*) Weitere Folgerungen und Aufgaben zur Winkelberechnung können erst nach Behandlung der Gesetze vom gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecke verstanden werden; s. § 32.

Digitized by Google

Fig. 64.

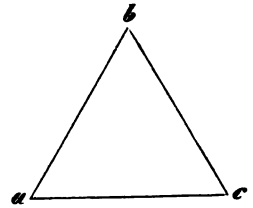


Fig. 65.

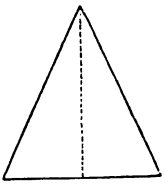
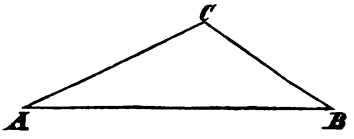


Fig. 66.



den Seiten in gleichseitige (Fig. 64), gleichschenklige (Fig. 65) und ungleichseitige (Fig. 66) ein. Beim gleichschenkligen Dreieck nennt man die beiden gleichen Seiten Schenkel, ihre gemeinsame Ecke Spitze, die dritte ungleiche Seite die Grundlinie oder Basis, die Winkel daran die Basiswinkel. — Vergleichen wir die Länge einer Dreiecksseite, z. B. AB in Fig. 66 mit der Summe der beiden anderen AC + BC! Zwischen den Punkten A und B ist die gerade Linie AB der kürzeste Weg. Die gebrochene Linie ACB würde ein Umweg sein.

Gesetz: Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

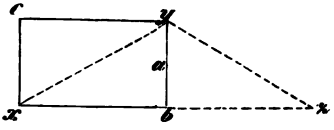
1. Wie teilt man die Dreiecke nach den Seiten ein? Erkläre diese drei Arten!
2. Was gilt von der Summe je zweier Seiten im Dreieck?
3. Die beiden Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind zusammen größer als die Basis; was gilt daher von einem Schenkel, verglichen mit der halben Basis?
4. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 60 m; der Schenkel ist doppelt so groß als die Basis; wie groß ist jede Seite?

Bemerk.: Es könnte nun hier die Beziehung zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck gleich angeschlossen werden, und dies würde auch für einfache Schulverhältnisse zu empfehlen sein. Bei weitergehenden Zielen, wo neben der bloßen Veranschaulichung auch die Einsicht in die Gründe nach Möglichkeit erstrebt werden muß, ist es jedoch richtiger, dieses Kapitel erst nach der Kongruenz folgen zu lassen, da es durch diese erst begründet wird.

§ 30. Von den verschiedenen Graden der Übereinstimmung geradliniger Figuren. (Gleichheit, Ähnlichkeit, Kongruenz.)

Vergleichen wir zwei geradlinige Figuren als Ganze, so kann dies geschehen 1) inbezug auf ihre Größe, d. h. inbezug auf den Flächenraum, den ihre Seiten einschließen, und 2) inbezug auf ihre Gestalt. Sind zwei Figuren inbezug auf ihre Größe oder ihren Flächeninhalt gleich, so nennt man sie schlechthin gleich oder gleichflächig und bezeichnet dies durch das Zeichen der Gleichheit (=). Zerteilen wir z. B. (Fig. 67) ein ausgeschnittenes Rechteck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke und setzen diese

Fig. 67.



Digitized by Google

mit einer ihrer Seiten, a, aneinander, wie Fig. 67 zeigt, so hat offenbar das so entstandene Dreieck xyz gleiche Größe mit dem Rechteck cybx; denn beide setzen sich ja aus denselben zwei Flächen zusammen. Daß letzteres vier Seiten, ersteres nur drei Seiten hat, kommt bei der Gleichflächigkeit nicht in Betracht; so kann auch ein Dreieck, Viereck ꝛc. einem Kreise gleich sein. Ist aber auch ein Dreieck einem Vierecke oder Fünfecke, — oder ein Viereck einem Kreise an Gestalt gleich?

Auch der umgekehrte Fall ist möglich, daß nämlich zwei Figuren an Größe verschieden, aber doch an Gestalt einander gleich sind. Dann nennen wir sie einander ähnlich und bezeichnen dies durch ∞. So ist z. B. die Landkarte dem Lande, der Riß dem betreffenden Gebäude, die Photographie der betreffenden Person ähnlich ꝛc. So können auch zwei Figuren einander ähnlich sein. Was heißt das? Kann auch ein Dreieck einem Vierecke oder Vielecke, oder ein Dreieck einem Kreise ähnlich sein? Dagegen ist ein Kreis dem anderen ähnlich ꝛc. Müssen sie deshalb auch gleich an Größe sein?

Wenn aber nun zwei Figuren einen gleich großen Flächenraum einschließen und zugleich auch einerlei Gestalt haben, mithin gleich und ähnlich sind, so nennt man sie kongruent. Sind zwei Figuren kongruent, so decken sie sich, d. h. sie lassen sich so aufeinanderlegen, daß keine die andere auch nur im geringsten überragt. Will z. B. der Schneider ein Kleid fertigen, so nimmt er das Muster und deckt es auf die Tuchfläche. So haben wir denn ein einfaches Mittel, um zu untersuchen, ob zwei Figuren kongruent sind oder nicht. Das Zeichen der Kongruenz ist ≅ (d. h. ähnlich und gleichflächig).

Nach dem Vorstehenden giebt es also eine dreifache Art von Übereinstimmung der Figuren:

1. die Übereinstimmung inbezug auf Größe, d. i. Gleichheit;
2. die Übereinstimmung inbezug auf Gestalt, d. i. Ähnlichkeit;
3. die Übereinstimmung inbezug auf Größe und Gestalt, d. i. Kongruenz.

Wir betrachten zunächst die Kongruenz der geradlinigen Figuren, da sie am leichtesten zu erkennen ist.

§ 31. Die Kongruenz der Dreiecke.

Wir haben als Mittel, die Kongruenz zweier Figuren zu erkennen, das Sichdecken derselben erwähnt. Sollen aber zwei Figuren sich decken, so müssen sie die gleiche Zahl der Seiten haben; ferner müssen die Seiten und Winkel der einen Figur den Seiten und Winkeln der anderen Figur gleich sein. Daraus folgt auch umgekehrt: Wenn zwei Figuren sich decken, so sind sie in allen ihren gleichgelegenen Seiten und Winkeln einander gleich.

Es leuchtet aber ein, daß es nicht immer möglich ist, Figuren zur Deckung zu bringen; so kann man z. B. Acker und Wiesen nicht aufeinanderlegen, um dadurch nachzuweisen, daß sie kongruent sind oder nicht. Man müßte vielmehr durch Messung feststellen, ob beide Flächen in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen. Es fragt sich

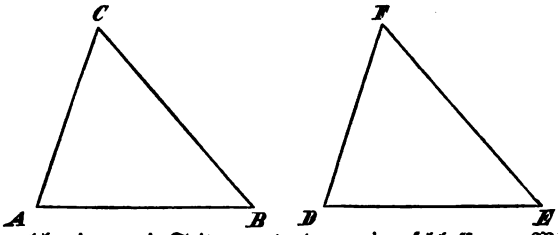
Digitized by Google

nun, ob man wirklich stets alle Stücke vergleichen muß, oder ob man schon aus einzelnen gleichen Stücken zweier Figuren auf deren Kongruenz schließen kann, und sodann, welche Stücke die einzelnen Figuren genau nach Größe und Gestalt bestimmen. So hängt bei allen Kreisen, die ja an sich schon in der Form stets übereinstimmen, die Größe allein vom Halbmesser ab. Man braucht daher bei zwei Kreisen nur zwei Radien auf ihre Gleichheit zu prüfen, um daraus die Kongruenz der Kreise zu schließen. Anders bei den Dreiecken. Da genügt es nicht, bloß ein Stück zu vergleichen. Der Lehrer zeichnet zwei Dreiecke mit derselben Grundlinie oder zwei Dreiecke mit einem gleichen Winkel (auch zwei gleichen Winkeln) und läßt daran erkennen, daß diese Dreiecke im Übrigen noch ganz verschieden sein können, also durchaus nicht kongruent zu sein brauchen.

In folgenden Sätzen wollen wir lernen, wieviel und welche Stücke die Kongruenz zweier Dreiecke bestimmen, die sogenannten Kongruenzsätze.

1. Kongruenzsatz: a) Veranschaulichung. Der Lehrer zeichnet (oder läßt von den Schülern zeichnen) die beiden Geraden AB und DE von gleicher Länge (Fig. 68), trägt in A und D gleiche Winkel an und macht deren andere Schenkel AC und DF auch gleich, verbindet die freien Endpunkte, so entstehen zwei Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Durch Ausschneiden beider Dreiecke in Papier und Aufeinanderlegen derselben (oder durch Ausschneiden eines solchen Dreiecks und Auflegen auf die beiden an der Tafel) überzeugen sich die Kinder von der Kongruenz. (Oder die Messung der dritten Seiten und der anderen Winkel zeigt, daß die beiden Dreiecke in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, also kongruent sind.)

Fig. 68.



Gesetz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. (1. Kongruenzsatz.)

b) Begründung: Wenn ich △ ABC auf DEF lege, so daß die beiden gleichen Seiten AB und DE sich decken, so muß AC in die Richtung von DF fallen, da ∠ A = D ist, Punkt C auf F, da AC = DF ist. Da nun Punkt B auf E, C auf F gefallen ist, so muß die zwischen B und C liegende Gerade BC auch auf EF fallen, da zwischen zwei Punkten nur eine Gerade zu ziehen möglich ist. Alle drei Seiten und Winkel decken sich, die Dreiecke sind also kongruent.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was heißt: Figuren sind kongruent?

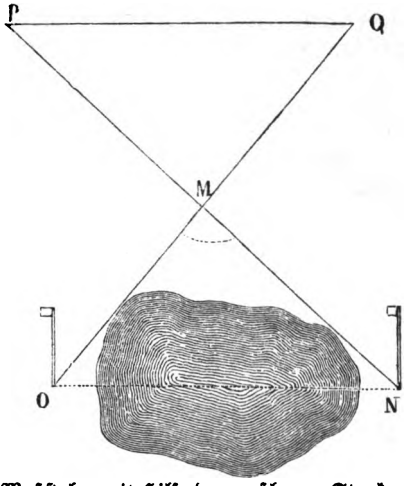
Digitized by Google

2. Wie lautet der 1. Kongruenzsatz (über Dreiecke)?
3. Zeichne ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach der oben unter 1a angegebenen Konstruktion!
4. Zeichne ein Dreieck, in welchem zwei Seiten 10 und 5 cm betragen und der eingeschlossene Winkel 60° mißt! Miß sodann die dritte Seite! (Bei genauer Zeichnung werden alle etwa 8,7 cm finden.) Miß den Winkel, welcher der größeren Seite von 10 cm gegenüberliegt (90°) und den, welcher der kleineren Seite von 5 cm gegenüberliegt (30°)!

   Merke: In kongruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

5. Man soll eine Linie messen, die nur an ihren beiden Enden zugänglich ist (Fig. 69). Nimmt man außer den beiden zugänglichen Punkten O und N noch einen dritten Punkt, außerhalb der zu messenden Linie ON, an, etwa M, so gilt es, ein dem △ M O N kongruentes darzustellen und die dritte Seite, die gleich O N sein muß, zu messen. Dies kann sogleich im Freien geschehen: Man steckt O M ab und verlängert sie über M hinaus um sich selbst, ebenso N M, steckt sodann die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte P und Q ab und mißt diese Linie. (Oder man zeichnet das △ M O N auf Papier, allerdings im verjüngten Maßstabe, mit Hilfe der meßbaren Strecken O M und M N und des Winkels M und mißt sodann wieder mit dem verjüngten Maßstabe die dritte Seite des gezeichneten Dreiecks.)

Fig. 69.



6. Es soll ein Tunnel durch einen Berg gegraben werden. Man will wissen: a) wie lang die Durchgrabung werden wird; b) in welcher Richtung wir diesseits, c) jenseits in den Berg eingraben müssen. Auflösung: Man sucht wie in Fig. 69 einen dritten Ort, von welchem aus eine an den Eingang und eine an den Ausgang des zu grabenden Tunnels gesteckte Stange zugleich gesehen werden kann, zeichnet dann das △ O M N wie in voriger Aufgabe ab, so ergiebt sich aus demselben die Größe von O N, ∠ O und ∠ N.

2. Kongruenzsatz: a) Veranschaulichung (Fig. 68). Man zeichnet die beiden Geraden A B und D E von gleicher Länge, trägt in A und B zwei Winkel an und in D und E dieselben Winkel, verlängert in beiden Fällen die Schenkel, bis sie sich schneiden, so entstehen zwei Dreiecke, welche in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen. Durch Ausschneiden und Aufeinanderlegen erkennt man wieder die Kongruenz.

Digitized by Google

Gesetz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

b) Begründung: Wenn ich △ ABC so auf DEF lege, daß die beiden gleichen Seiten AB und DE sich decken, so muß AC in die Richtung von DF fallen, da ∠ A = D ist, und BC in die Richtung von EF, da ∠ B = E ist. Punkt C, der Schnittpunkt von AC und BC, muß daher auch dahin fallen, wo DF und EF sich schneiden. Da zwei Linien sich nur in einem Punkte schneiden können, so muß Punkt C auf F fallen, die Dreiecke sind also kongruent.

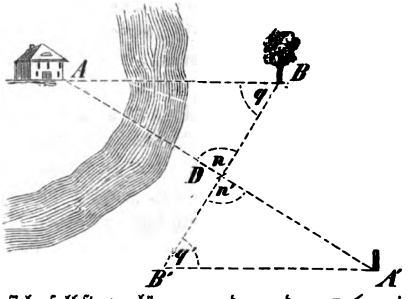
[Zusatz: Von den beiden Dreiecken (Fig. 68) sei uns nur bekannt, daß AB = DE, ∠ A = D und ∠ C = F ist, daß sie also in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. Was wissen wir dann auch von den dritten Winkeln B und E, ohne daß wir sie zuvor messen? (§ 27, 3c.) So stimmen die beiden Dreiecke auch wieder in beiden anliegenden Winkeln überein und sind somit nach vorigem Beweise kongruent.

Gesetz: Dreiecke sind auch kongruent, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. (2. Kongruenzsatz, Teil 2.)]

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie lautet der 2. Kongruenzsatz?
2. Zeichne ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (nach der oben bei der Veranschaulichung angegebenen Konstruktion)!
3. Versuche ein Dreieck zu zeichnen, in welchem die eine Seite 4 cm und die anliegenden Winkel a) 110° und 80°, b) 110° und 70°, c) 110° und 50° betragen! Warum erhältst du in den beiden ersten Fällen kein Dreieck? Wieviel dürfen also die beiden gegebenen Winkel noch nicht betragen?
4. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Fig. 70) zu messen, wenn nur der eine Punkt B zugänglich ist. Nimmt man den Punkt D zuhilfe, so gilt es, ein dem △ ABD kongruentes zu zeichnen — mit Hilfe der meßbaren Stücke BD, ∠ q und n — und darin die dem ∠ n gegenüberliegende Seite zu messen. Im Freien selbst würde man die Linie BD durch Abstecken um sich selbst verlängern, dann den ∠ q in B′ antragen und so weit in dieser Richtung gehen müssen, bis man an einen Punkt A′ kommt, der mit A und D in einer Richtung liegt. Dann ist AB in A′B′ meßbar.

Fig. 70.

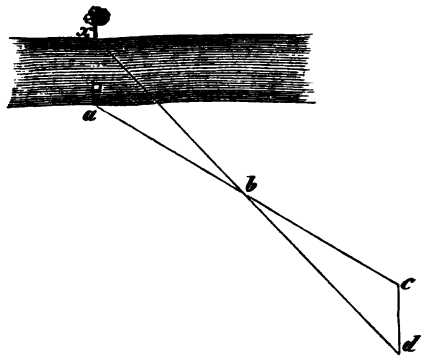


5. Die Breite eines Flusses zu messen, ohne daß man da-

Digitized by Google

rüber geht. An dem einen Ufer des Flusses (Fig. 71) stehe ein Grenzstein oder ein Baum (x) oder ein sonstiges Zeichen; auf dem anderen Ufer, dem Baume gerade gegenüber, bei a, ebenfalls. Nun gehe man schräg rückwärts (rechts oder links, wo sich gerade die vollkommenste Ebene befindet) und stecke an irgend einem Punkte den Stab b ein. Man messe nun die Entfernung a b und stecke in gleicher Entfernung noch einen Stab c ein, doch so, daß man von c über b nach a sehen kann. Von diesem Punkte c gehe man nun der Richtung von x nach a parallel (also so, daß ∠ c = a wird) so weit, bis man den Punkt d findet, von welchem aus man über den Punkt b nach x sehen kann. So groß nun die Linie cd ist, so groß ist auch die Breite des Flusses, xa. — Einfacher ist's natürlich hier, wie auch in Aufgabe 4, nach vorangegangener Messung der Linie a b und der ∠∠ b a x und a b x das △ a b x nach dem verjüngten Maßstabe auf Papier zu zeichnen.

Fig. 71.



[6. Zeichne ein Dreieck, von welchem eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben ist! Da der dritte Winkel im Dreieck die beiden gegebenen Winkel zu 2 R ergänzen muß, so trage zunächst beide nebeneinander und ergänze die Winkelsumme zu einem gestreckten, so ist dieser Ergänzungswinkel der andere anliegende Winkel.]

7. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck: a. wenn eine Kathete 5 cm und der anliegende spitze Winkel 38° beträgt; [b. wenn die Hypotenuse 7 cm und ein anliegender Winkel 50 ° beträgt.]

3. Kongruenzsatz: a) Veranschaulichung: (Fig. 68). Man zeichnet die beiden Linien AB und DE von gleicher Länge, beschreibt aus A und D mit beliebiger, aber gleicher Zirkelöffnung Kreisbogen und aus B und E mit einer dritten Zirkelöffnung ebenfalls, so daß letztere erstere schneiden. Verbindet man die Schnittpunkte mit den Endpunkten der Grundlinien, so entstehen zwei Dreiecke, welche in ihren drei Seiten übereinstimmen. Aufeinanderlegen der Dreiecke (oder Messen aller übrigen Stücke) ergiebt wiederum die Kongruenz der beiden Dreiecke.

Gesetz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

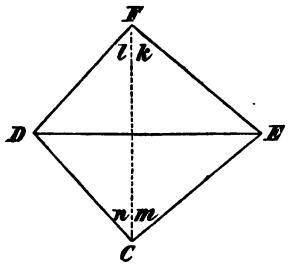
b) Eine andere Veranschaulichung: Der Lehrer zeigt ein Dreieck, das aus drei Holzstäben gefertigt ist, die am Ende so mit Stiften und Löchern versehen sind, daß ein Stab an den andern befestigt werden kann. Daran macht man den Kindern anschaulich, daß sich die Seiten des Dreiecks nicht verschieben lassen. Daraus

Digitized by Google

folgt, daß drei Seiten ein Dreieck, d. h. seine Größe und seine Gestalt, bestimmen.

[c. Die eigentliche Begründung kann hier noch nicht gegeben werden, sondern erst, nachdem das Gesetz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck besprochen worden ist. Sie mag im Buche jedoch gleich hier ihre Erledigung finden, im Unterricht erst nach § 33. — Man lege die beiden Dreiecke mit einer gleichen Seite aneinander (Fig. 72), verbinde die gegenüberliegenden Spitzen F und C, so entstehen die beiden gleichschenkligen Dreiecke CDF und CEF. In diesen ist $\sphericalangle l = n$ und $\sphericalangle k = m$ als Basiswinkel; folglich auch $\sphericalangle l + k = n + m$ oder der ganze $\sphericalangle DFE = DCE$. Nun stimmen die Dreiecke auch in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem 1. Kongruenzsatze.]

Fig. 72.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie lautet der 3. Kongruenzsatz?
2. Zeichne ein Dreieck aus den drei Seiten! (S. die Konstr. bei der Veranschaulichung a!)
3. Versuche ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten a) 9, 3 und 2 cm; b) 9, 5 und 4 cm; c) 9, 6 und 4 cm betragen! Warum erhieltest du in den beiden ersten Fällen kein Dreieck? (§ 29.) Wann nur können also drei Linien zu einem Dreieck zusammengestellt werden?
4. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck aus einer Seite!
5. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus Basis und einem Schenkel! Wie groß muß der Schenkel stets im Verhältnis zur Basis sein?
6. Führe die Aufgabe vom Winkelabtragen (§ 21, Nr. 2) auf die vorige Aufgabe zurück!

[4. Kongruenzsatz: a) Veranschaulichung (Fig. 68): Man zeichnet die beiden Geraden AB und DE von gleicher Länge, trägt in A und D gleiche Winkel an und beschreibt aus den Punkten B und E mit einer gleichen Zirkelöffnung, die größer als AB ist, Kreisbogen, verbindet die Schnittpunkte C und F mit B, bzw. E, so entstehen zwei Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. Aufeinanderlegen der Dreiecke zeigt die Kongruenz derselben.

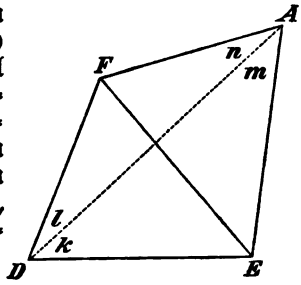
Gesetz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

b) Die Begründung kann erst verstanden werden, wenn das Gesetz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck und seine Umkehrung bekannt ist, kann darum da, wo sie überhaupt den Schülern zugemutet werden darf, erst nach § 32 folgen, mag jedoch hier gleich in diesem Paragraphen der Kongruenz ihre Stelle finden. — Man lege die

Digitized by Google

beiden Dreiecke mit ihren größeren Seiten a n einander und verbinde die gegenüberliegenden Ecken A und D (Fig. 73), so entsteht das gleichschenklige △ A D E. In diesem ist ∠ k = m. Da nun nach voriger Konstruktion die ganzen Winkel E D F und E A F gleich sind, so müssen auch die beiden Restwinkel l und n gleich, also auch △ A D F gleichschenklig sein, d. i. Seite D F = A F. Somit stimmen die Dreiecke A E F (A B C in Fig. 68) und D E F auch in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem 1. Kongruenzsatze.

Fig. 73.



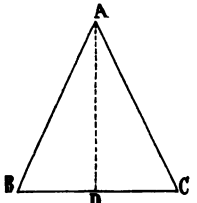
Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie lautet der 4. Kongruenzsatz?
2. Zeichne ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel! (S. Konstruktion bei der Veranschaulichung des 4. Kongruenzsatzes; zeichne dabei stets die Seite zuerst, an welcher der gegebene Winkel liegen muß, d. i. hier die kleinere!)
3. Versuche ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel; derselbe betrage 30°; die beiden Seiten seien a) 8 und 4 cm, b) 8 und 5 cm, c) 8 und 3 cm lang. Zeichne wiederum die Seite zuerst, an welcher der Winkel von 30° liegen soll, d. i. hier die größere. Was bemerkst du dann bei dem Kreise, den du mit der 4 cm, 5 cm, 3 cm langen Seite beschreibst? Zwei Seiten und der der kleineren gegenüberliegende Winkel bestimmen also nicht immer ein Dreieck vollständig. Die Konstruktion kann dabei ein einziges rechtwinkliges Dreieck, oder zwei nichtkongruente Dreiecke (ein spitz- und ein stumpfwinkliges) oder gar kein Dreieck ergeben.
4. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse 7 cm und eine Kathete 4 cm beträgt! Zeichne zuerst die 4 cm lange Kathete, trage daran einen rechten Winkel an ꝛc.]

§ 32. Die Beziehung zwischen Seiten und Winkeln im gleichschenkligen Dreieck.

I. Gesetz von den Basiswinkeln: a) Veranschaulichung: Man schneide ein gleichschenkliges Dreieck aus (Fig. 74), falte es in der Mittellinie zusammen, so erkennen die Kinder, daß sich die beiden Basiswinkel genau decken, also gleich sind. Dasselbe kann an der Wandtafel durch Messung der beiden Basiswinkel gefunden werden.

Fig. 74.



Gesetz: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.

b) Begründung: Halbieren wir den Winkel an der Spitze und verlängern die Winkelhalbierende bis zur Grundlinie, so stimmen die beiden Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel

Digitized by Google

überein (AB = AC, AD = AD, ∠ BAD = CAD), sind also kongruent nach dem 1. Kongruenzsatze. Folglich müssen auch die anderen gleichgelegenen Stücke gleich sein, also auch ∠ B = C.

c) Folgerungen: 1. Würde der eine Basiswinkel ein rechter Winkel sein, so müßte es der andere auch sein; es bliebe dann für den dritten Winkel nichts übrig. Der Basiswinkel kann also kein rechter, noch viel weniger ein stumpfer, sondern muß stets ein spitzer sein. Wohl aber kann der Winkel an der Spitze ein stumpfer, rechter oder spitzer sein.

2. Der Außenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Basiswinkel, folglich, da diese gleich sind, doppelt so groß als ein Basiswinkel.

3. Da im gleichseitigen Dreieck jede Seite als Basis angesehen werden kann, müssen auch je zwei Winkel in demselben und somit alle drei unter einander gleich sein. Da sie zusammen 180° betragen, so kommen auf jeden 60° und auf jeden Außenwinkel 120°. Man kann daher mit Hilfe des gleichseitigen Dreiecks Winkel von 60 und 120° ohne Transporteur zeichnen.

4. Aus dem Vorigen folgt wieder, daß das gleichseitige Dreieck stets spitzwinklig sein muß. Faßt man daher die Einteilung der Dreiecke nach Seiten und Winkeln (§ 27 und 28) zusammen, so erhält man überhaupt folgende sieben Arten der Dreiecke:

das gleichseitige Dreieck,
das stumpfwinklig-gleichschenklige Dreieck,
das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck,
das spitzwinklig-gleichschenklige Dreieck,
das stumpfwinklig-ungleichseitige Dreieck,
das rechtwinklig-ungleichseitige Dreieck,
das spitzwinklig-ungleichseitige Dreieck.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

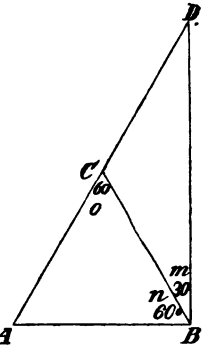
1. Welches Gesetz gilt von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck?
2. Welchen Teil des Außenwinkels an der Spitze beträgt der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck?
3. Wie groß ist jeder Innen- und Außenwinkel des gleichseitigen Dreiecks?
4. Wie teilt man die Dreiecke nach Seiten und Winkeln ein? Zeichne diese sieben Arten!
5. Berechne die Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn gegeben ist: a) der Winkel an der Spitze = 50°; b) ein Basiswinkel = 70°; c) wenn der Basiswinkel doppelt so groß als der Winkel an der Spitze, d) um 15° größer als der Winkel an der Spitze ist; e) der Außenwinkel an der Spitze 74° beträgt!
6. Zeichne ohne Transporteur (mit Anwendung des gleichseitigen Dreiecks) Winkel von 60° und 120°!
7. Errichte im Endpunkt der Linie AB (Fig. 75) eine Senkrechte, indem du über AB ein gleichseitiges Dreieck zeichnest, die Seite AC über C hinaus

Digitized by Google

um sich selbst verlängerst und Punkt D mit B verbindest. Wieviel ° beträgt dann ∠ n? Welcher Teil ist ∠ m von 0? Wieviel ° daher? Wieviel beträgt also der ganze Winkel ABD?

8. Teile den gegebenen rechten Winkel ABD (Fig. 75) in drei gleiche Teile, indem du über dem einen Schenkel ein gleichseitiges Dreieck errichtest und den dadurch erhaltenen Winkel von 60° (ABC) noch halbierst.
9. Zeichne ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gegeben ist! Wie groß muß jeder Basiswinkel werden?

Fig. 75.



II. Umkehrung des Satzes von den Basiswinkeln: a) Veranschaulichung: (Fig. 74). Man trage an der Geraden BC in B und C zwei gleiche spitze Winkel an und verlängere die Schenkel bis zum Schnittpunkt A. Durch Messung der beiden, den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten AB und AC oder durch Zusammenklappen des Dreiecks in der Mitte finden die Schüler, daß AB = AC ist.

Gesetz: Im Dreieck liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber; oder: Wenn ein Dreieck zwei gleiche Winkel hat, so ist es ein gleichschenkliges.

b) Begründung: Halbiert man wieder den ∠ A (Fig. 74), so sind die entstandenen Dreiecke kongruent, da sie in einer Seite (AD), einem anliegenden (∠ BAD = CAD) und dem gegenüberliegenden Winkel (∠ B = C) übereinstimmen. Also müssen auch die gleichgelegenen (homologen) Seiten AB und AC gleich sein.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was für Seiten liegen gleichen Winkeln im Dreieck gegenüber?
2. Was für ein Dreieck muß dasjenige sein, welches zwei Winkel von je 60° enthält?
3. Miß mit Hilfe eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks (Brettchen oder zwei gleich lange Stäbe unter 1 R zusammengefügt) die Höhe eines Turmes (oder Baumes), bei dem du bis an den Fuß gelangen kannst! Halte dabei das Dreieck so, daß der eine Schenkel des rechten Winkels (die eine Kathete) wagerecht liegt, die andere Kathete senkrecht steht, und gehe so weit nach dem Turme zu (oder von ihm weg), bis der schräge Schenkel des Winkels von 45° (die Hypotenuse) genau nach der Spitze des Turmes gerichtet ist. Dann bilden Turm, wagerechte Entfernung und schräge Visierlinie ein Dreieck mit zwei Winkeln von je 45°, also auch ein gleichschenkliges Dreieck. Die Turmhöhe muß daher gleich der wagerechten Entfernung vom Turm sein, die nun zu messen ist.

§ 33. Lage der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks zur Basis.

a. Veranschaulichung: Aus der Veranschaulichung in § 32 Ia geht ferner hervor: Auch die Teile des Winkels an der Spitze decken

Digitized by Google

sich, desgleichen die Teile der Grundlinie und endlich auch die beiden Winkel am Fußpunkt der Teilungslinie. Daraus geht hervor, daß durch diese Linie zugleich der Winkel an der Spitze und die Basis halbiert wird und daß sie mit der Basis gleiche, also rechte Nebenwinkel bildet oder senkrecht auf der Basis steht (Fig. 74).

Gesetz: Die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks liegt senkrecht über der Mitte der Basis. Oder: Halbiert man den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, so halbiert diese Winkelhalbierende auch die Basis und steht senkrecht auf derselben. (Dieser Satz kann auch noch verschiedene andere Umkehrungsformen annehmen.)

b. Begründung: Aus der in § 32 Ib bewiesenen Kongruenz der Dreiecke ABD und ACD folgt die Gleichheit der Seiten BD und CD (also Seite AB halbiert) und die Gleichheit der Winkel ADB und CDB. Da dieselben Nebenwinkel sind, so beträgt jeder 1 R; also steht AD senkrecht auf BC.

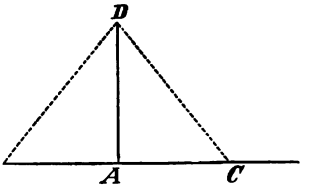
Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie liegt die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks zur Mitte der Basis?

[2. Was gilt von der Linie im gleichschenkligen Dreieck, a) die den Winkel an der Spitze halbiert; b) welche die Spitze mit der Mitte der Basis verbindet; c) welche senkrecht von der Spitze nach der Basis geht; d) welche senkrecht in der Mitte der Basis errichtet wird?]

3. Was für ein Dreieck muß dasjenige sein, dessen Spitze senkrecht über der Mitte der Grundlinie liegt?

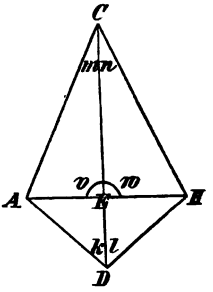
Fig. 76.



4. In einem Punkte A einer gegebenen Linie eine Senkrechte zu errichten (Fig. 76). Schneide von A aus zu beiden Seiten gleiche Stücke ab, beschreibe aus den erhaltenen Punkten B und C mit gleicher Zirkelöffnung Kreuzbogen, verbinde den Schnittpunkt D mit A, so ist AD die verlangte Senkrechte. Warum? (Vgl. Aufg. 2 b.)

§ 34. Zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinschaftlicher Basis und Konstruktionsaufgaben, welche darauf beruhen.

Fig. 77.



a. Veranschaulichung: Man schneide zwei gleichschenklige Dreiecke, auf gleicher Grundlinie nach verschiedenen Seiten errichtet, aus und falte sie in einer Linie zusammen, welche die Spitzen derselben verbindet, so lehrt der Augenschein das Gesetz: Wenn man auf einer gemeinschaftlichen Basis zwei gleichschenklige Dreiecke errichtet und die Spitzen derselben verbindet, so halbiert diese Verbindungslinie die Winkel an der Spitze und die gemeinschaftliche Basis und steht senkrecht auf derselben.

b) Begründung: △ ACD und BCD (Fig. 77) sind kongruent, da sie in allen drei Seiten überein-

Digitized by Google

stimmen. Folglich sind: 1) die gleichliegenden Winkel m und n (k und l) gleich. Nun sind auch die Dreiecke ACE und BCE kongruent (AC = BC, CE = CE, ∠ m = n; 1. Kongruenzsatz). Folglich auch: 2) AE = BE und ∠ v = w. Wenn Nebenwinkel gleich sind, beträgt jeder 1 R, also auch: 3) CE senkrecht auf AB.

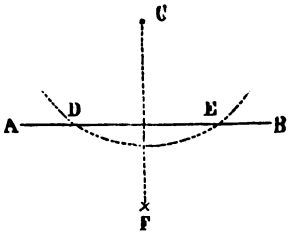
c. Aufgaben, die auf dem vorigen Satz beruhen:

1) Einen gegebenen Winkel zu halbieren: Der zu halbierende Winkel muß Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks werden. (Siehe die im § 21 ohne Begründung gegebene Lösung, Fig. 50.) Was für Dreiecke sind ABC und BCD? Welches ist die Verbindungslinie der Spitzen? Was geschieht durch dieselbe mit dem Winkel an der Spitze, also auch mit ∠ A?

2) Eine gegebene Gerade AB zu halbieren (Fig. 77): Die zu halbierende Linie muß gemeinschaftliche Basis von zwei gleichschenkligen Dreiecken werden. Errichte daher über AB nach beiden Seiten gleichschenklige Dreiecke und verbinde die Spitzen! — Wie steht diese Halbierungslinie zugleich in der Mitte von AB? — Ist die zu halbierende Linie sehr lang, so schneide erst links und rechts gleiche Stücke ab und halbiere dann den mittleren Rest auf vorige Weise (oder nach dem Augenmaße)!

3) Von einem gegebenen Punkte C außerhalb einer geraden Linie AB eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen (Fig. 78): Der gegebene Punkt muß Spitze des einen, ein Teil der Linie gemeinschaftliche Basis beider gleichschenkligen Dreiecke werden. Schlage daher aus C einen Kreisbogen, welcher die gegebene Gerade in zwei Punkten, D und E, schneidet; errichte über DE noch ein gleichschenkliges Dreieck (durch Kreuzbogen aus D und E) und verbinde F mit C.

Fig. 78.

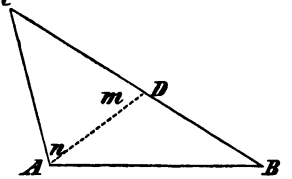


Beweis: Welches sind die beiden gleichschenkligen Dreiecke? Was verbindet CF in denselben? Worauf steht sie darum senkrecht?

§ 35. Beziehung zwischen Seiten und Winkeln im ungleichseitigen Dreieck.

I. Die Gegenwinkel ungleicher Seiten: a) Veranschaulichung: Man zeichnet ein ungleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 79), vergleicht die drei Winkel durch Messung mit einander und läßt so das Gesetz finden: Im Dreieck liegt der größten Seite der größte (und der kleinsten Seite der kleinste) Winkel gegenüber.

Fig. 79.



b) Begründung: Wenn BC größer als AC ist, so mache man CD gleich AC, so liegen ihnen die gleichen Winkel n und m gegenüber (§ 32, I). Der

Digitized by Google

Winkel m ist nun als Außenwinkel am △ ABD so groß als beide gegenüberliegende Winkel, also größer als der eine von ihnen, ∠ B. Dies muß dann auch von dem gleichen ∠ n gelten. Umsomehr muß der ganze ∠ CAB, von dem ∠ n nur ein Teil ist, größer als ∠ B sein.

II. Die Gegenseiten ungleicher Winkel: a) Veranschaulichung: Man zeichnet ein Dreieck mit 3 ungleichen Winkeln; die Messung der 3 Dreiecksseiten ergiebt das Gesetz: Im Dreieck liegt dem größten Winkel die größte Seite (und dem kleinsten Winkel die kleinste Seite) gegenüber.

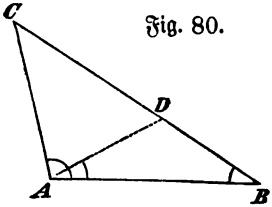


Fig. 80.

b) Begründung: Wenn ∠ A größer als B ist (Fig. 80), so mache man ∠ DAB = B, dann ist AD = BD (§ 32, II.). Nun sind im △ DAC die Seiten AD + CD größer als die dritte Seite AC. Da ich für AD auch BD setzen kann, so müssen auch BD + CD oder die ganze Seite BC größer als AC sein.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was für Winkel liegen im Dreieck ungleichen Seiten und was für Seiten ungleichen Winkeln gegenüber?
2. Welche Seite ist a) im rechtwinkligen, b) im stumpfwinkligen Dreieck die größte? (Denn welcher Winkel ist der größte in dem betreffenden Dreieck?)
3. Ziehe von einem Punkte aus verschiedene gerade Linien nach einer gegebenen Geraden; wieviel Linien kannst du dabei so ziehen, daß sie senkrecht zur gegebenen Linie stehen? Wie stehen alle andern Linien? Welche von allen Linien ist die kürzeste? Warum? (Rechtwinklige Dreiecke!) Wie werden die Linien bei zunehmender Entfernung von der Senkrechten? (Stumpfwinklige Dreiecke!) Durch welche Linie bestimmt man daher die Entfernung eines Punktes von einer Linie, z. B. eines Ortes von einer Straße?

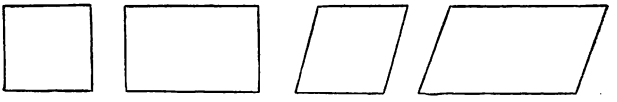
Kapitel 5.

Die Vierecke und Vielecke nach ihren wichtigsten Eigenschaften.

§ 36. Die Arten der Vierecke.

Zur Veranschaulichung dienen die Fig. 81 bis 86, die vom Lehrer an geometrischen Körpern als Begrenzungsflächen gezeigt, in Papier ausgeschnitten und an der Tafel angezeichnet werden.

Fig. 81. Fig. 82. Fig. 83. Fig. 84.



Digitized by Google

Fig. 85.

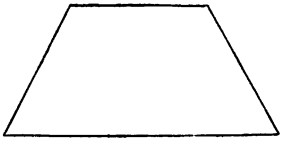
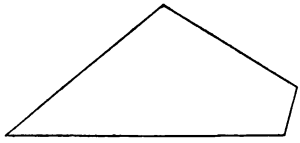


Fig. 86.



I. Haupteinteilung der Vierecke. Vergleicht die Richtung je zweier Gegenseiten in den 6 Vierecken. Wieviel Paar parallele Seiten haben die ersten vier? das fünfte? das sechste? Danach teilt man die Vierecke ein: in Vierecke mit zwei Paar, einem Paar und gar keinen parallelen Gegenseiten, oder in: Parallelogramme, Trapeze und Trapezoide.

II. Untereinteilung der Parallelogramme: a) nach den Winkeln. Was für Winkel haben die Parallelogramme in Fig. 81 und 82? die Fig. 83 und 84? Danach zerfallen die Parallelogramme wieder in rechtwinklige und schiefwinklige.

b) Nach den Seiten: Vergleiche die vier Seiten in den Parallelogrammen Fig. 81 und 83! Welche nur sind in Fig. 82 und 84 gleich? Wie sind die anstoßenden? Danach teilt man die Parallelogramme in gleichseitige und ungleichseitige (paarweis gleichseitige) ein.

c) Nach Seiten und Winkeln: Fig. 81 ist bezüglich der Seiten ein gleichseitiges, nach den Winkeln ein rechtwinkliges Parallelogramm. Das gleichseitig-rechtwinklige Parallelogramm heißt Quadrat; Fig. 82: das ungleichseitig-rechtwinklige Parallelogramm heißt Rechteck (Oblongum); Fig. 83: das gleichseitig-schiefwinklige Parallelogramm heißt der Rhombus oder die Raute; Fig. 84: das ungleichseitig-schiefwinklige Parallelogramm heißt das Rhomboid, auch die Schrägraute.

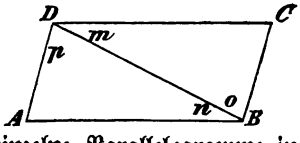
Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was für ein Viereck ist ein Parallelogramm, ein Trapez, ein Trapezoid?
2. Was für ein Parallelogramm ist ein Quadrat, Rechteck, Rhombus, Rhomboid?
3. Bestimme die Art der Vierecke, die an folgenden Gegenständen Begrenzungsflächen bilden: Spielwürfel, Tischplatte, Bank, Stuhlsitz, Kohlenkasten ꝛc.
4. Nenne noch einige Gegenstände, an denen einzelne Arten der Vierecke vorkommen!

§ 37. Die wichtigsten Gesetze, die für alle Parallellogramme gelten.

I. Die aufeinanderfolgenden (benachbarten) Winkel. Was für Winkel zwischen den Parallelen AB und CD sind die Winkel A und ADC? Was gilt von diesen? (§ 24, 3).

Fig. 87.



Gesetz: Im Parallelogramm betragen zwei aufeinanderfolgende Winkel stets 2 R.

II. Diagonaldreiecke. a) Veranschaulichung: Der Lehrer schneidet einzelne Parallelogramme in

Digitized by Google

der Diagonale durch und legt die Diagonaldreiecke auf einander. Beim Quadrat und Rhombus genügt bloßes Umklappen, bei den beiden anderen Parallelogrammen muß das eine Diagonaldreieck erst umgedreht, dann aufgelegt werden.

Gesetz: Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt.

b) Begründung (Fig. 87): Welche Seite haben die beiden Dreiecke ABD und CBD gemeinsam? Warum ist ∠ m = n und p = o? (§ 24, 2). Also sind die Dreiecke kongruent nach dem 2. Kongruenzsatze.

III. Gegenüberliegende Winkel: Aus der Kongruenz der beiden Diagonaldreiecke folgt, daß sich die gegenüberliegenden Winkel A und C decken.

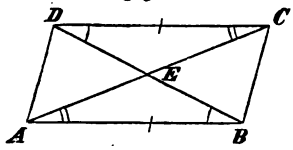
Gesetz: Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

IV. Gegenseiten: Aus der Kongruenz der Diagonaldreiecke folgt ferner, daß sich auch die gegenüberliegenden Seiten AB und CD, AD und BC decken.

Gesetz: Im Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich.

V. Teilung der Diagonalen: a) Veranschaulichung: Durch Messung der Diagonalabschnitte ergiebt sich das

Fig. 88.



Gesetz: Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.

b) Begründung folgt aus der Kongruenz der beiden Scheiteldreiecke DEC und ABE (Fig. 88) nach dem 2. Kongruenzsatze.

VI. Umkehrungssatz: Die vorstehenden Lehrsätze lassen sich auch wieder umkehren, so daß man aus den erwähnten Eigenschaften schließt, daß das betr. Viereck ein Parallelogramm sein muß. Von diesen Umkehrungssätzen ist jedoch nur einer so wichtig, daß er auch hier angeführt werden mag.

a) Veranschaulichung: Zeichne einen beliebigen Winkel mit ungleichen Schenkeln, ∠ DAB in Fig. 87; schlage aus dem Endpunkt des kürzeren Schenkels mit der Zirkelöffnung des längeren und aus dem Endpunkt des längeren mit der Zirkelöffnung des kürzeren Schenkels Kreisbogen — aus D mit AB und aus B mit AD —; verbinde den Schnittpunkt C mit den freien Endpunkten A und D, so entsteht ein Viereck mit zwei Paar gleichen Seiten. Eine genaue Prüfung ihrer Richtung ergiebt sodann, daß die Gegenseiten auch parallel laufen, das Viereck also ein Parallelogramm ist.

Gesetz: Sind in einem Viereck die Gegenseiten gleich, so ist es ein Parallelogramm.

b) Begründung: Zum Beweise, daß AB parallel DC und AD parallel BC sein muß (Fig. 87), wenn die genannten Seiten gleich sind, ziehe man die Diagonale BD; dann sind die Diagonaldreiecke kongruent, da sie in allen drei Seiten übereinstimmen. Folglich sind die gleichliegenden Winkel gleich, ∠ m = n und o = p. Erstere sind innere

Digitized by Google

Wechselwinkel an den geschnittenen Geraden AB und DC, letztere an AD und BC. Da Wechselwinkel nur an Parallelen gleich sein können, so müssen die genannten Seiten parallel, muß also das Viereck ABCD ein Parallelogramm sein.

c) Anwendung. 1. Bei der Aufgabe: Durch einen Punkt (D) zu einer gegebenen Geraden (AB) eine Parallele zu ziehen (Fig. 87). Verbinde den Punkt D mit A und verfahre nun weiter wie oben in der Veranschaulichung unter VI a, so ist CD die verlangte Parallele.

2. Bei der Konstruktion der Parallelogramme: Den vierten Eckpunkt findet man am bequemsten durch die unter VI a angegebenen Kreuzbogen.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

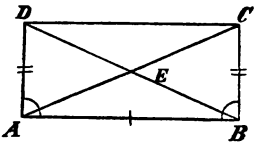
1. Nenne die fünf Gesetze, die von allen Parallelogrammen gelten!
2. a) Ein Winkel im Parallelogramm sei 1 R, was für Winkel sind die anderen Winkel? b) Ein Winkel betrage 70°; wie groß sind die anderen? c) Zwei benachbarte Winkel verhalten sich wie 4:5; wie groß sind die einzelnen Winkel im Parallelogramm?
3. Wie groß sind die Seiten eines Rechtecks von 40 m Umfang, wenn dasselbe 3 mal so lang als breit ist? (Eine kurze und eine lange Seite bilden zusammen den halben Umfang = 20 m ꝛc.)
4. Kehrs „Geometrische Rechenaufgaben", S. 2, Nr. 8—10 und 32.
5. Zeichne: a) ein Quadrat aus einer Seite; b) ein Rechteck aus zwei anstoßenden Seiten; c) einen Rhombus aus einer Seite und einem Winkel; d) ein Rhomboid aus zwei anstoßenden Seiten und einem Winkel! (Verwende dabei VI c 2.)
6. Schneide diese vier Arten der Parallelogramme aus, schneide sie in der Diagonale durch und gieb an, was für Dreiecke (bezüglich der Seiten und Winkel) bei den einzelnen Parallelogrammen entstehen!

[§ 38. Besondere Gesetze für die rechtwinkligen und für die gleichseitigen Parallelogramme.

I. Die rechtwinkligen Parallelogramme (Quadrat und Rechteck): a) Veranschaulichung: Durch Messen der beiden Diagonalen eines rechtwinkligen Parallelogramms finden die Schüler das Gesetz: Im rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen gleich.

b) Begründung (Fig. 89): Die Dreiecke ABD und ABC sind kongruent nach dem 1. Kongruenzsatze; also die dritten Seiten BD und AC auch gleich.

Fig. 89.



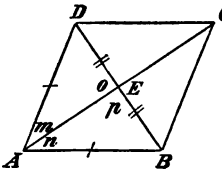
c) Folgerungen: Da sich in jedem Parallelogramm die Diagonalen halbieren und hier die ganzen Diagonalen gleich sind, so müssen auch die halben untereinander gleich sein; also ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen, E, gleichweit von den vier Ecken entfernt; es läßt sich daher um jedes rechtwinklige Parallelogramm ein Kreis

Digitized by Google

beschreiben. (E der Mittelpunkt; AE, BE, CE und DE Halbmesser; die Peripherie geht durch die vier Eckpunkte.)

II. Das gleichseitige Parallelogramm (Quadrat und Rhombus): a) Veranschaulichung: Durch Zusammenklappen der Diagonaldreiecke erst in der einen, dann in der anderen Diagonale läßt sich das Gesetz veranschaulichen: Im gleichseitigen Parallelogramm halbieren die Diagonalen die Winkel und schneiden sich rechtwinklig.

Fig. 90.



b) Begründung (Fig. 90): $\triangle ADE \cong ABE$ nach dem 3. Kongruenzsatze; denn $AE = AE$, $AD = AB$ und $DE = BE$, da sich die Diagonalen halbieren; folglich die homologen Winkel gleich: $\sphericalangle n = m$, also $\sphericalangle A$ halbiert, und $\sphericalangle o = p$ oder, da dies Nebenwinkel sind, $AE \perp BD$. — Daß der Durchschnittspunkt E von den vier Seiten gleich weit entfernt ist und daß sich darum in das gleichseitige Parallelogramm ein Kreis beschreiben läßt, welcher die vier Seiten in je einem Punkte berührt, würde durch die Kongruenz von je zwei Dreiecken zu beweisen sein, die durch Senkrechte (von Punkt E auf die Seiten gefällt) gebildet werden. Der Satz kann jedoch als weniger wichtig übergangen werden.

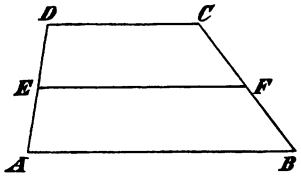
Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Durch welche Eigenschaften unterscheiden sich a) die rechtwinkligen Parallelogramme von den schiefwinkligen; b) die gleichseitigen von den ungleichseitigen?
2. Zeichne ein Quadrat, zu dem eine Diagonale gegeben ist! (Im Zeichnen oft anzuwenden: ein Quadrat auf der Spitze ruhend. Zeichne die beiden gleichen, sich unter rechten Winkeln halbierenden Diagonalen, das im Zeichnen sogenannte Achsenkreuz!)
3. Zeichne eine Raute aus beiden Diagonalen! Wie teilen sich die beiden ungleichen Diagonalen und wie stehen sie aufeinander?]

§ 39. Vom Trapez.

I. Winkel in jedem Trapez (Fig. 91): Was für Winkel sind A und D zwischen den Parallelen AB und CD? Wie groß ist daher ihre Summe? An was für einer Seite des Trapezes liegen dieselben? Warum können die Winkel an einer der parallelen Seiten, z. B. $\sphericalangle$ A und B, nicht 2 R betragen?

Fig. 91.



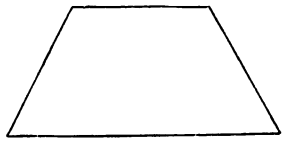
Gesetz: Im Trapez betragen zwei Winkel an einer der nichtparallelen Seiten 2 R.

II. Winkel im symmetrischen Trapez: Vergleiche in verschiedenen Trapezen a) die beiden parallelen, b) die beiden nichtparallelen Seiten nach ihrer Länge. Welche sind stets ungleich? Welche können

Digitized by Google

mitunter gleich lang sein? Solche Trapeze, in denen die ungleichlaufenden Seiten gleich lang sind, nennt man gleichschenklige oder symmetrische Trapeze (Fig. 92). Wie sind in diesen die beiden ungleichlaufenden Seiten oder Schenkel zu den beiden Parallelen oder Grundlinien geneigt? (Wie im gleichschenkligen Dreieck).

Fig. 92.



Gesetz: Im symmetrischen Trapez sind zwei Winkel an derselben Parallelen gleich groß.

Zur Begründung ziehe von einem Endpunkt der oberen Grundlinie eine Parallele zu einer Nichtparallelen und vergleiche die beiden Winkel an der unteren Grundlinie mit einem an der Hilfslinie entstandenen Winkel!

III. Diagonaldreiecke: Schneidet man irgend ein Trapez in der Diagonale durch, so decken sich die beiden Dreiecke nicht. Sie können nicht kongruent sein, da die eine Parallele stets größer sein muß als die andere.

Gesetz: Das Trapez wird durch eine Diagonale in zwei ungleiche Dreiecke geteilt.

IV. Mittellinie: Verbindet man in einem beliebigen Trapez die Mitten der beiden Nichtparallelen, so läuft diese Verbindungslinie E F (Fig. 91) zu den beiden Parallelen auch parallel. Da sie von beiden gleichen Abstand hat, also in der Mitte zwischen beiden läuft, heißt sie die Mittellinie. Sie liegt aber auch bezüglich ihrer Größe in der Mitte zwischen beiden Parallelen, bildet die Mittelzahl oder das arithmetische Mittel zwischen diesen.

Gesetz: Die Mittellinie im Trapez ist gleich der halben Summe der beiden Parallelen.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Welche Winkel betragen in jedem Trapez 2 R?
2. Was ist ein symmetrisches oder gleichschenkliges Trapez? Welche Winkel darin sind gleich?
3. Was ist die Mittellinie eines Trapezes? Wie verhält sie sich zu den beiden Parallelen?
4. Berechne die zwei anderen Winkel eines Trapezes, wenn die Winkel an der unteren Parallelen 54° und 82° betragen!
5. Im symmetrischen Trapez betrage ein Winkel 58°. Wie groß sind die drei anderen?
6. Wie groß ist die Mittellinie eines Trapezes, dessen Parallelen 18 und 30 cm betragen?

§ 40. Von den Vielecken.

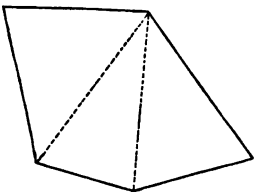
1. Erklärung: Figuren, die von mehr als vier Seiten begrenzt werden, heißen Vielecke (Polygone). Sind in einem Vieleck alle Seiten und Winkel untereinander gleich, so ist dasselbe ein regelmäßiges Vieleck

Digitized by Google

(reguläres Polygon); wenn dies nicht der Fall ist, unregelmäßiges. Hinweis auf das Vorkommen regelmäßiger Fünf-, Sechs-, Achtecke 2c.

2. Diagonalen: Ziehe in einigen Vielecken von einem Punkte aus alle möglichen Diagonalen! Wieviel lassen sich im Fünfeck ziehen? (Fig. 93.) Im Sechseck? Siebeneck? Nach wieviel Eckpunkten können jedesmal keine Diagonalen gezogen werden? Warum nicht nach diesen drei Punkten?

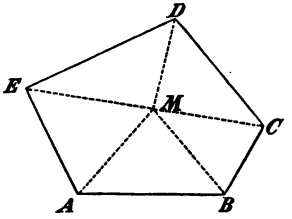
Fig. 93.



Gesetz: In einem Vieleck lassen sich von einem Eckpunkt aus drei Diagonalen weniger ziehen, als das Vieleck Ecken oder Seiten hat. (Formel: n — 3 Diagonalen, wenn n die Anzahl der Seiten bedeutet.) Von einem Eckpunkte waren im Fünfeck zwei Diagonalen möglich; wieviel von allen fünf Ecken? (10.) Ziehe diese zehn Diagonalen wirklich! Dabei findest du, daß je zwei nur eine Linie bilden, nur in entgegengesetzter Richtung gezogen sind. Also sind in Wirklichkeit nur 10:2=5 verschiedene Diagonalen möglich. (Im n-Eck $\frac{n.(n-3)}{2}$ Diagonalen.)

3. Winkelsumme: Verbinde in einem Vieleck, z. B. Fünfeck (Fig. 94), einen Punkt innerhalb desselben mit allen Eckpunkten. Wieviel Dreiecke entstehen? Wie groß ist deren Winkelsumme? (10 R.) Dabei sind die Winkel um den Punkt M herum mit einbegriffen. Wie groß sind diese? Wollen wir bloß die Umfangswinkel (Polygonwinkel) berechnen, so müssen jene abgezogen werden. Wieviel bleibt daher? (6 R). (Eine gleiche Entwicklung beim n-Eck führt zu der Formel (2 n—4) R.)

Fig. 94.



Gesetz: In jedem Vieleck beträgt die Summe der Umfangswinkel doppel soviel Rechte, als das Vieleck Seiten hat, weniger 4 R

4. Ein Umfangswinkel im regelmäßigen Vieleck: Da im regelmäßigen Vieleck alle Winkel gleich sind, so beträgt z. B. im regelmäßigen Fünfeck jeder Umfangswinkel $\frac{6}{5}$ R = 108°.

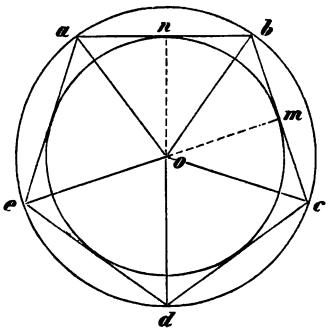
(Im regelmäßigen n-Eck $\frac{2n-4}{n}$ Rechte.)

5. Mittelpunkts- oder Centriwinkel im regelmäßigen Vieleck: Im regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Punkt finden, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten (und zwar von den Mitten) gleich weit entfernt ist, so daß sich von diesem Punkte aus (Fig. 95) erstens ein Kreis um das reg. Vieleck beschreiben läßt, der durch alle Eckpunkte geht, zweitens ein Kreis in dasselbe, der alle Seiten in den Mitten berührt. — (Dies mag durch Veranschaulichung gefunden werden. Die Beweisführung durch Kongruenz verschiedener Dreiecke 2c. würde für viele

Digitized by Google

Schüler etwas zu verwickelt sein.) — Die Dreiecke oab, oae ꝛc. sind kongruente gleichschenklige Dreiecke und heißen, da eines derselben das ganze Polygon bestimmt, Bestimmungsdreiecke. Die Winkel an der gemeinsamen Spitze dieser gleichschenkligen Dreiecke, die Mittelpunkts- oder Centriwinkel des reg. Vielecks, sind einander gleich. Wieviel betragen sie als Winkel um einen Punkt? Wieviel Grad kommen daher auf einen Centriwinkel im reg. Fünfeck?

Fig. 95.



$$\left[\text{Formel: } \frac{360°}{n} \text{ oder } \frac{4\,R}{n}.\right]$$

Addiere vom reg. Fünfeck, Sechseck ꝛc. den Centri- und Polygonwinkel; die Summe beträgt stets 180°. Dies muß stets so sein; denn der Centriwinkel eod (Fig. 95) beträgt mit den beiden Basiswinkeln des gleichschenkligen Bestimmungsdreiecks oder mit dem doppelten Basiswinkel oed zusammen 2 R. Der doppelte Basiswinkel oed ergiebt aber den ganzen Polygonwinkel aed.

Gesetz: Man findet den Umfangswinkel eines reg. Vielecks auch, wenn man den Centriwinkel desselben von 180° abzieht.

$$\left[\text{Formel: } 2\,R - \frac{4\,R}{n} \text{ oder } 180° - \frac{360°}{n}.\right]$$

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist ein regelmäßiges Vieleck?
2. Nenne Gegenstände, an denen reg. Vielecke vorkommen!
3. Wieviel Diagonalen lassen sich in einem Vieleck a) von einem Eckpunkte, b) im ganzen ziehen?
4. Wieviel beträgt die Winkelsumme in jedem Vieleck?
5. Wie findet man im reg. Vieleck a) die Größe eines Umfangswinkels, b) eines Centriwinkels?
6. Führe folgende Tabelle über Polygone bis zum Zwölfeck weiter fort!

Anzahl der Seiten.	Anzahl der Diagonalen von 1 Eckp.	Anzahl sämtlicher Diagonalen.	Summe aller Polygonwinkel.	Größe eines Polygonwinkels im reg. Vieleck.	Größe eines Centriwinkels im reg. Vieleck.
5	2	5	6 R	$1\frac{1}{5}\,R = 108°$	72°
6	3	9	8 R	$1\frac{1}{3}\,R = 120°$	60°
7					
.					
.					
.					
12					
(n	n − 3	$\frac{n(n-3)}{2}$	(2n − 4) R.	$\frac{2n-4}{n}$ R.	$\frac{360°}{n}$.)

Digitized by Google

7. Welches Dreieck ist eine regelmäßige Figur? Warum?
8. Welches Viereck ist eine regelmäßige Figur? Warum die Raute nicht?

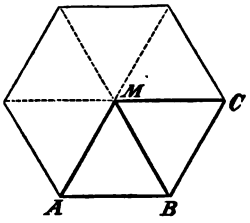
§ 41. Konstruktion regelmäßiger Vielecke.

I. Mit Hilfe des Transporteurs: a) unter Verwendung des Polygonwinkels, wenn die Seite gegeben ist: Man zeichnet die gegebene Seite, trägt in beiden Endpunkten den nach § 40 zu berechnenden Polygonwinkel an, z. B. beim Fünfeck einen Winkel von 108°, macht die Schenkel gleich der Seite, trägt wiederum an den Endpunkten dieselben Winkel an und fährt so lange fort, bis das verlangte Vieleck entstanden ist.

b) Unter Verwendung des Centriwinkels, wenn der Winkelstrahl oder Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben ist: Man zeichnet um einen Punkt herum die (nach § 40 zu berechnenden) Centriwinkel des betreffenden Vielecks, z. B. beim Neuneck 9 Winkel von je 40°, macht deren Schenkel gleich dem gegebenen Halbmesser und verbindet deren Endpunkte.

II. Ohne Transporteur: Die „geometrischen" Konstruktionen der Vielecke werden meist mittels des Kreises ausgeführt; darum mögen dieselben später an die Reihe kommen (s. § 64). Nur das regelmäßige Sechseck, das sich auch ohne Hilfe des Kreises und Transporteurs darstellen läßt, mag hier erwähnt werden: Wieviel Grad beträgt der Centriwinkel des reg. Sechsecks? Wieviel beträgt daher jeder Basiswinkel in einem Bestimmungsdreieck? Das Dreieck hat 3 Winkel von je 60°. Was für ein Dreieck ist es also? Ich zeichne daher 6 gleichseitige Dreiecke um einen Punkt herum. Ich brauche zunächst nur 2 derselben, △ ABM und BCM (Fig. 96) nebeneinander zu zeichnen, kann dann die 3 in einem Punkte zusammenstoßenden Seiten AM, BM und CM über diesen Punkt M hinaus um sich selbst verlängern und die Endpunkte verbinden.

Fig. 96.



Aufgaben.

1. Zeichne mit Hilfe des Transporteurs unter Benutzung des zu berechnenden Polygonwinkels aus der gegebenen Seite a) ein regelmäßiges Fünfeck, b) Siebeneck!
2. Zeichne mit Hilfe des Transporteurs unter Benutzung des zu berechnenden Centriwinkels aus dem gegebenen Winkelstrahl a) ein reg. Neuneck, b) Zehneck!
3. Zeichne ohne Transporteur mit Benutzung des gleichseitigen Dreiecks ein reg. Sechseck!

Digitized by Google

Kapitel 6.

Von der Flächenausmessung oder Flächenberechnung und der Gleichheit geradliniger Figuren.

§ 42. Flächenmaße.

Das Quadratmeter und seine Teile. Wie Linien durch Linien, so werden Flächen durch Flächen gemessen. Wie dort eine Linie von bestimmter Länge als Grundmaß diente, so ist hier eine Fläche von bestimmter Größe als Grundmaß nötig, und wir müssen dann bei der Ausmessung einer Figur zusehen, wie oft dieses Grundmaß auf der gegebenen Fläche nebeneinander ausgebreitet werden kann. Dazu eignet sich das Quadrat am besten. Das Grundmaß ist ein Quadrat, dessen Seiten 1 m lang sind, und heißt daher Quadratmeter, abgekürzt qm. Für kleinere Figuren dienen Quadratcentimeter (qcm) und Quadratmillimeter, das sind Quadrate von 1 cm, bzw. 1 mm Seitenlänge. Die Währungszahlen, die zwar schon auf der Mittelstufe in den Rechenstunden zur Besprechung und Verwendung kommen, werden hier doch noch einmal anschaulich entwickelt werden müssen, da dort die Längen-, Flächen- und Körpermaße von den Kindern noch leicht miteinander vermengt werden. — Man bringe ein auf Pappe dargestelltes und in niedere Maße geteiltes qm mit zur Stunde oder zeichne ein qm an der Tafel an. Man teilt zunächst zwei gegenüberliegende Seiten in zehn gleiche Teile (Decimeter) und verbindet die Teilungspunkte, so entstehen zehn Streifen oder Rechtecke. Verfährt man nun bei den beiden anderen Quadratseiten ebenso, so wird dadurch jeder Streifen in 10 Quadrate und zwar Quadratdecimeter (qdm) geteilt. Also hat das ganze qm $10 \times 10 = 100$ qdm*). Eines von diesen 100 Quadratdecimetern wird nun auf entsprechende Weise in 100 qcm zerteilt. Daraus folgt, daß 1 qm $100 \times 100 = 10000$ qcm enthält. Die Teilung des qcm in 100 qmm läßt sich mit Kreide nicht mehr darstellen; Fig. 97 zeigt die Veranschaulichung auf Papier.

Fig. 97.

Die Schüler schließen nun:

1 qm hat $10000 \times 100 = 1000000$ qmm.

Übersichtliche Zusammmenstellung:

1 qm = 100 qdm
1 qdm = 100 qcm
1 qcm = 100 qmm

1 qm [= 100 qdm =] 10000 qcm = 1000000 qmm.

*) Zwar ist das Quadratdecimeter kein amtlich vorgeschriebenes Flächenmaß, und es soll damit nicht gerechnet werden. Jedoch bei der Einführung der Flächenmaße (und später auch der Körpermaße) halte ich es für praktisch, es als Zwischenstufe zu verwenden, da die Teilung des Meters in zehn gleiche Teile vor den Augen der Schüler wirklich vorgenommen werden kann, während die Teilung in 100 cm an der Tafel schwer ausführbar ist.

Digitized by Google

Daraus folgt:

[1 qdm = $^1/_{100}$ qm = 0,01 qm],
1 qcm = $^1/_{10000}$ qm = 0,0001 qm,
1 qm = $^1/_{1000000}$ qm = 0,000001 qm.

Die Quadratcentimeter stehen also in der vierten, die Quadratmillimeter in der sechsten Decimalstelle neben den Quadratmetern.

II. Vielfache des Quadratmeters. 100 qm bilden 1 Ar (a), 100 a wieder 1 Hektar (ha), 100 ha 1 Quadratkilometer (qkm).

Übersichtliche Zusammenstellung:

1 qkm = 100 ha
1 ha = 100 a
1 a = 100 qm

Also: 1 qkm = 100 ha = 10000 a = 1000000 qm.

[Daraus folgt:

1 ha = $^1/_{100}$ qkm = 0,01 qkm
1 a = $^1/_{10000}$ qkm = 0,0001 qkm
1 qm = $^1/_{1000000}$ qkm = 0,000001 qkm.

Die Hektare erfordern also neben den Quadratkilometern zwei, die Ar vier und die Quadratmeter sechs Decimalstellen.]

Das Ar möge der Lehrer veranschaulichen, indem er auf dem Schulhofe ein Quadrat von 10 m Seitenlänge, also 100 qm Inhalt abstecken läßt oder durch Knaben, die an die Eckpunkte zu stellen sind, sichtbar macht. In Schulen mit größeren Sälen kann der Fußboden eines solchen eine Vorstellung vom Ar vermitteln. — Das Hektar erfordert einen quadratischen Raum im Freien von 100 m Seitenlänge. Das Quadratkilometer mögen sich die Kinder dadurch veranschaulichen, daß man ihnen von einem Orte aus zwei Wege von je 1 km Länge, die rechtwinklig zu einander stehen, andeutet. Das daraus zu bildende Quadrat ist 1 qkm. — Da die Geographiebücher noch vielfach Quadratmeilen angeben, so möge wie beim Quadratmeter entwickelt werden, daß eine Quadratmeile $7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2} = 56\frac{1}{4}$ qkm enthält. Und da im Volke noch immer Morgen (oder Acker) im Gebrauche sind, so möge von diesen erwähnt werden, daß ein Morgen etwa = $\frac{1}{4}$ ha = 25 a ist.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was für ein Quadrat ist 1 qm, 1 qcm, 1 qmm?
2. Was für Teile vom qm sind die qcm und qmm?
3. a) Schreibe 5 qm 196 qcm in decimaler Form als qm; resolviere sodann in qcm. b) Reduziere 17 568 qcm auf qm!
4. Das Wievielfache ist 1 qkm, 1 ha, 1 a vom qm?
5. a) Schreibe 6 qkm und 7 ha als qkm; b) 5 ha 7 a als ha!
6. Zeichne ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge (ein Quadratdecimeter) und teile es in 100 qcm!

Digitized by Google

§ 43. Flächenberechnung des Quadrats.

Will man nun mit dem obigen Flächenmaße den Flächeninhalt einer Figur messen, so muß man ein qcm oder ein qm sovielmal auf die zu messende Figur legen, als es eben geht. Hier habe ich z. B. die quadratische Begrenzungsfläche eines Würfels und da ein qcm von Papier. Wollte ich nun den Inhalt der Würfelfläche wissen, so müßte ich das qcm sovielmal auf die Fläche legen, als es nötig ist, um dieselbe vollständig zu decken, hier 16 mal. Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt also 16 qcm. Wollte ich eine Stube messen, so müßte ich dasselbe Verfahren mit einem qm wiederholen, bei einem Acker mit einem a. Man sieht leicht ein, daß ein solches Messen äußerst beschwerlich und unbequem, ja in den meisten Fällen, besonders bei Messung größerer Flächen, gar nicht anwendbar ist. — In diesem und den folgenden Paragraphen wollen wir nun sehen, wie wir die Flächenmaße selbst gar nicht abzutragen, sondern nur gewisse Linien zu messen brauchen und daraus die Menge der Flächeneinheiten berechnen können.

I. Berechnung des Flächeninhaltes: Der Lehrer veranschaulicht auf ähnliche Weise wie in § 42, I, daß ein Quadrat (von 5 dm Seitenlänge in 25 qdm), von 4 cm Seitenlänge in 16 qcm, von 3 m Seitenlänge in 9 qm zerlegt werden kann.

Regel: Man berechnet ein Quadrat, indem man eine Seite desselben mißt und diese Maßzahl mit sich selbst multipliziert, oder kürzer ausgedrückt: wenn man eine Seite quadriert. ($F = s.s$ oder s^2, wobei F den Flächeninhalt, s eine Seite des Quadrates bedeutet.)

II. Berechnung einer Seite: Umgekehrt soll nun aus dem gegebenen Flächeninhalt eines Quadrats wieder die Seite berechnet werden. Der Flächeninhalt betrage 49 qm; dann muß die Seite soviel m lang sein, daß diese Zahl mit sich selbst multipliziert wieder 49 ergiebt, d. i. die Quadratwurzel aus $49 = 7$ m.

Regel: Man findet die Seite eines Quadrats aus dem Flächeninhalt, indem man aus demselben die Quadratwurzel zieht ($s = \sqrt{F}$).*)

Ist der Flächeninhalt in ha oder a angegeben, so verwandelt man dieselben erst in qm, dann werden die Seitenmaße in m ausgedrückt.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie findet man a) den Flächeninhalt eines Quadrats aus der Seite, b) die Seite aus dem Flächeninhalt?
2. a) Zeichne ein Quadrat, daneben ein anderes mit 3 mal so großer Seite, teile letzteres in solche Quadrate, wie das erste ist. Wieviel erhältst du? b) Wievielmal so groß mußt du die Seite eines Quadrats machen, wenn der Inhalt 25 mal so groß werden soll?

*) Wo keine Zeit zur Erlernung des Quadratwurzelziehens im Rechenunterricht erübrigt werden kann, lasse der Lehrer wenigstens die Quadratzahlen von 1—20 und von den reinen Zehnern bilden und lernen und daraus wieder die Wurzeln angeben. Dann können Aufgaben mit solchen Zahlen gelöst, bei anderen Zahlen die Grenzwerte angegeben werden, z. B. $\sqrt{155}$ zwischen 12 u. 13.

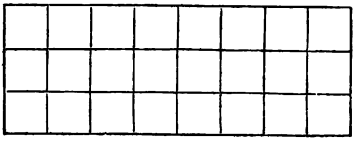
Digitized by Google

3. Zeichne 2 Quadrate, deren Seiten sich wie 2:3 verhalten. Wie verhalten sich die Flächeninhalte?
4. Miß die Kante des vorliegenden Würfels und berechne daraus die ganze Oberfläche (6 Quadrate)!
5. Kehr: „Geometrische Rechenaufgaben" S. 12 u. 13 Nr. 43 u. 44.

§ 44. Flächenberechnung des Rechtecks.

I. Berechnung des Flächeninhalts: Durch eine ähnliche Veranschaulichung wie in § 42 und 43 (Fig. 98) entwickelt man die

Fig. 98.



Regel: Man findet den Inhalt eines Rechtecks, indem man die Länge mit der Breite oder die Grundlinie mit der Höhe multipliziert. ($F = g.h$). Dabei ist es gleichgültig, ob man die längere oder kürzere Seite als Grundlinie auffaßt. Es ist wiederholt darauf hinzuweisen, daß die Maßzahlen beider Seiten bei der Multiplikation dieselben Benennungen haben müssen und daß der Flächeninhalt dann die Benennung des entsprechenden Flächenmaßes erhält. So entspricht dem m das qm, dem cm das qcm ꝛc.

II. Berechnung der Grundlinie und der Höhe: Soll nun aus dem Inhalte des Rechtecks (Fig. 98) = 24 qm und der Grundlinie = 8 m wieder die Höhe berechnet werden, so müssen wir eine Zahl suchen, die mit 8 multipliziert wieder 24 ergiebt, die also den 8. Teil von 24 beträgt. (Oder: Von dem Produkt 24 müssen wir zu dem einen Faktor 8 noch den anderen Faktor suchen, indem wir 24 durch 8 dividieren, = 3.)

Regel: Man findet die Höhe eines Rechtecks, indem man den Flächeninhalt durch die Grundlinie dividiert $\left(h = \frac{F}{g}\right)$.

Auf gleiche Weise finden die Schüler die Regel: Man findet die Grundlinie eines Rechtecks, indem man den Flächeninhalt durch die Höhe dividiert $\left(g = \frac{F}{h}\right)$.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie findet man a) den Flächeninhalt, b) die Grundlinie, c) die Höhe eines Rechtecks?
2. Kehr: „Geometrische Rechenaufgaben" S. 8—13. (Nach Bedarf auszuwählen.)
3. Miß den Flächeninhalt der Fußböden einzelner rechtwinkligen Stuben im Schulhause und der eigenen Wohnung aus, ebenso von Wänden, Tischplatten ꝛc.!

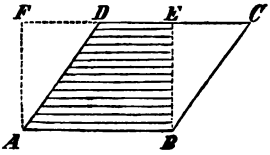
§ 45. Flächenberechnung des schiefwinkligen Parallelogramms.

I. Vergleichung des schiefwinkligen und rechtwinkligen Parallelogramms: a) Veranschaulichung: Man schneidet ein schief-

Digitized by Google

winkliges Parallelogramm ABCD (Fig. 99) aus, schneidet rechts das rechtwinklige △ BCE ab und setzt es links an. Dadurch entsteht das rechtwinklige Parallelogramm ABEF. Da es sich aus denselben beiden Teilen zusammensetzt, wie das schiefwinklige, so müssen beide gleichen Flächeninhalt haben. Beide stehen auf derselben Grundlinie AB, und die Höhe des Rechtecks, BE, ist zugleich die Höhe des schiefwinkligen Parallelogramms; denn der Abstand der beiden Parallelen wird nicht durch die Schräge BC, sondern durch die Senkrechte BE gemessen.

Fig. 99.



Gesetz: Ein schiefwinkliges Parallelogramm ist gleich demjenigen rechtwinkligen, mit dem es gleiche Grundlinie und Höhe hat.

b) Begründung dieses Gesetzes für alle Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe: Beide Parallelogramme haben das Trapez ABED gemeinsam. Das △ BCE, welches mit dem Trapez zusammen das rechtw. P. bildet, ist kongruent dem △ ADF, welches mit dem Trapez zusammen das schiefw. P. bildet; denn AD = BE als Gegenseiten im Parallelogramm, ∠ ADF = C und ∠ F = BEC als Gegenwinkel an Parallelen (2. Kongruenzsatz). Da also die Bestandteile beider Parallelogramme gleich sind, so müssen es auch die Parallelogramme selbst sein.

II. Berechnung: Daher wird auch das schiefwinklige Parallelogramm berechnet: Grundlinie mal Höhe. Dabei müssen wir aber stets erst die Höhe fällen, da die an die Grundlinie anstoßende Seite schiefwinklig zu ihr steht und somit größer als die Höhe ist.

Es gelten dieselben 3 Regeln (oder Formeln) wie in § 44.

$$\left(F = g.h;\ h = \frac{F}{g};\ g = \frac{F}{h}.\right)$$

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Welchem rechtwinkligen Parallelogramm ist ein schiefw. gleich?
2. Wie berechnet man im schiefwinkligen, überhaupt in jedem Parallelogramm a) die Fläche, b) die Höhe, c) die Grundlinie?
3. Verwandle ein schiefw. P. in ein rechtw. a) durch Zeichnung, b) durch Ausschneiden!
4. Miß einzelne Flächenräume von der Form schiefwinkliger Parallelogramme aus!
5. Zeichne 2 Parallelogramme mit gleicher Höhe, so daß das eine eine 3 mal so große Grundlinie hat als das andere. Wievielmal so groß ist dann auch dessen Fläche? Wie verhalten sich also Parallelogramme von gleicher Höhe? Wie verhalten sich Parallelogramme mit gleicher Grundlinie zu einander?

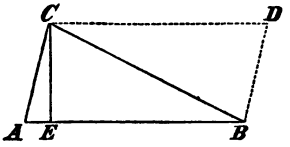
§ 46. Flächenberechnung des Dreiecks.

I. Vergleichung des Dreiecks mit seinem Parallelogramm: Der Lehrer zerschneidet rechtw. und schiefw. Parallelogramme

Digitized by Google

in Diagonaldreiecke. Schon in § 37 ist gezeigt worden, wie die Kongruenz der Diagonaldreiecke veranschaulicht werden kann. Jetzt setzt man wieder je 2 kongruente Dreiecke zu einem Parallelogramm zusammen. Ein Dreieck ist daher die Hälfte eines solchen Parallelogramms. Dreieck und Parallelogramm stehen auf derselben Grundlinie AB (Fig. 100), und CE ist die gemeinschaftliche Höhe.

Fig. 100.



Gesetz: Ein Dreieck ist die Hälfte von seinem Parallelogramm, d. i. von demjenigen, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

[Zusatz: Da △ ABC als Diagonaldreieck die Hälfte von dem Parallelogramm ABCD ist, so ist es auch von jedem andern P., das mit jenem gleiche Grundlinie und Höhe und somit gleichen Inhalt hat, die Hälfte.]

II. Berechnung: a) Fläche: Aus dem Vorigen folgt die Regel: Man findet den Inhalt eines Dreiecks, indem man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert. — Statt erst das Produkt durch 2 zu dividieren, ist es für den Fall, daß ein Faktor eine gerade Zahl ist, vorteilhaft, diesen Faktor zu dividieren; z. B.:

$$\frac{15.8}{2} = 15.4 = 60.$$

$$\left(F = \frac{g.h}{2} \text{ oder } \frac{g}{2}.h \text{ oder } g.\frac{h}{2}.\right)$$

b) Grundlinie: Entwickelung an folgendem Beispiele: Es sei die Grundlinie des Dreiecks zu finden, dessen Flächeninhalt 10 qm und dessen Höhe 4 m beträgt. Von welcher Figur ist das Dreieck die Hälfte? Wie groß würde also das ganze Parallelogramm sein? Das fragliche Parallelogramm beträgt 20 qm und hat eine Höhe von 4 m; wie lang muß die Grundlinie sein? Wie lang ist also auch die Grundlinie des Dreiecks?

Regel: Um aus dem Flächeninhalte und der Höhe eines Dreiecks dessen Grundlinie zu finden, verdoppelt man den Flächeninhalt und dividiert das Produkt durch die Höhe.

$$\left(g = \frac{2F}{h};\ \text{oder da } F = g.\frac{h}{2} \text{ war,}\right.$$

$$\left.\text{so ist umgekehrt wieder der eine Faktor } g = F:\frac{h}{2}.\right)$$

c) Höhe: In gleicher Weise gelangt der Lehrer zu dem Satze: Um aus der Grundlinie und dem Flächeninhalte eines Dreiecks die Höhe zu finden, verdoppelt man den Flächeninhalt und dividiert denselben durch die Grundlinie — oder man dividiert den einfachen Flächeninhalt durch die halbe Grundlinie.

$$\left(h = \frac{2F}{g} \text{ oder } = F:\frac{g}{2}.\right)$$

Digitized by Google

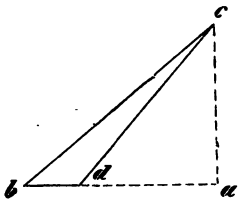
III. Vergleichung der Dreiecke untereinander: Haben 2 Dreiecke gleiche Grundlinie und Höhe, so ist jedes die Hälfte von einem und demselben Parallelogramme, sind also beide einander gleich.

Gesetz: Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Von welchem Parallelogramm ist ein Dreieck die Hälfte?
2. Wie berechnet man in einem Dreieck: a) die Fläche, b) die Grundlinie, c) die Höhe?
3. Wie verhalten sich Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe zu einander?
4. Inwiefern kann man den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem halben Produkt seiner Katheten setzen?
5. Zeichne in einem stumpfwinkligen Dreieck vom Scheitel eines spitzen Winkels die Höhe; wohin fällt dieselbe? (Fig. 101.)

Fig. 101.



6. Kehr: „Geom. Rechenaufg." S. 14. (Ausgewählte Beispiele.)

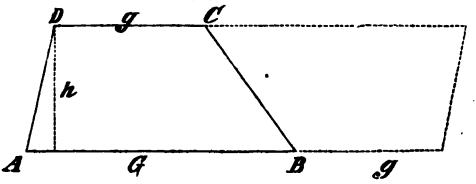
[7. Zeichne zwei Dreiecke mit gleicher Höhe, so daß sich ihre Grundlinien wie 2:3 verhalten. Wie verhalten sich dann auch die Flächen? Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich also wie ihre Grundlinien und Dreiecke von gleicher Grundlinie wie ihre Höhen.]

§ 47. Flächenberechnung des Trapezes.

Wiederhole die Gesetze vom Trapez nach § 39!

I. Flächeninhalt: Man schneide ein Trapez auf einem Doppelblatt, also doppelt aus. Miß beide Parallelen oder Grundlinien und die Höhe! Sie seien 9,5 und 6 cm lang. Man legt das eine so an das andere, daß immer eine große und eine kleine Grundlinie nebeneinander fallen (Fig. 102). Was für eine Viereck entsteht dadurch? Woraus setzt sich die Grundlinie dieses Parallelogramms zusammen? Wieviel cm beträgt sie daher? (9 + 5 = 14 cm). Die Höhe ist dieselbe wie beim Trapez, also 6 cm. Berechne nun den Inhalt dieses Parallelogramms! (14.6 = 84 qcm). Welcher Teil desselben ist das Trapez?

Fig. 102.



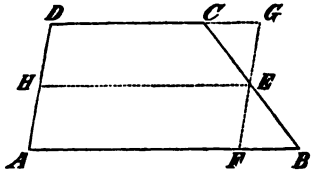
$$\left(\frac{84}{2} = 42 \text{ qcm.}\right)$$

Regel: Man findet die Fläche eines Trapezes, indem man die Summe der parallelen Seiten mit der Höhe multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

$$\left(F = \frac{(G+g)\,h}{2} \text{ oder auch } \frac{(G+g)}{2}\,h \text{ oder } (G+g)\cdot\frac{h}{2}\cdot\right)$$

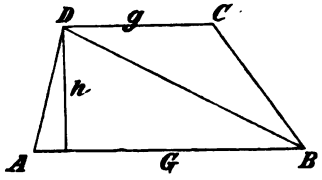
Digitized by Google

Fig. 103.



b) Eine andere Entwickelung wird durch Fig. 103 veranschaulicht, wobei vom Trapez ABCD unten rechts ein △ BEF abgeschnitten und oben das gleiche △ CEG angesetzt wird, so daß ein Parallelogramm AFGD entsteht, welches die mittlere Grundlinie (Mittellinie) EH zur Grundlinie und die Höhe des Trapezes zur Höhe hat.

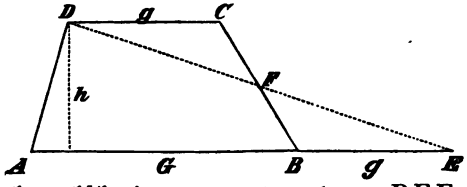
Fig. 104.



c) Eine dritte Entwickelung (Fig. 104) würde darin bestehen, daß man erst das eine Diagonaldreieck, ABD, mit der großen Grundlinie, G, dann das andere, CDB, mit der kleinen Grundlinie, g, und derselben Höhe, h, berechnet und dann beide addiert.

d) Endlich könnte auch noch die Verwandlung des Trapezes in ein Dreieck (Fig. 105), welches die Summe beider Parallelen zur Grundlinie und die Höhe des Trapezes zur Höhe hat, zur Entwickelung obiger Regel dienen. Anschaulich gestaltet sich dieser Weg, wenn man das △ DCF oben abschneidet und unten als △ BEF ansetzt.

Fig. 105.



Von den vier Entwickelungen erscheint die erste für einfache Schulverhältnisse als die leichteste.

[II. Höhe und Grundlinien: Von dem Trapez in Fig. 102 sei der Inhalt = 42 qcm und die beiden Grundlinien = 9 und 5 cm bekannt; man soll daraus die Höhe berechnen.

Wie groß ist das Parallelogramm, das wir durch Verdoppelung des Trapezes bilden können? $(2 \cdot 42 = 84$ qcm).

Wie groß ist die Grundlinie desselben? $(9 + 5 = 14$ cm.)

Wie groß daher die Höhe? $\left(\frac{84}{14} = 6 \text{ cm.}\right)$

Dies ist zugleich die Höhe des Trapezes.

Regel: Man findet die Höhe eines Trapezes, wenn man den doppelten Flächeninhalt durch die Summe beider Parallelen dividiert.

$$\left(h = \frac{2F}{G+g}.\right)$$

Auf gleiche Weise entwickelt man die Regel: Man findet die Summe der Parallelen im Trapez, wenn man den doppelten Flächeninhalt durch die Höhe dividiert.

$$\left(G + g = \frac{2F}{h}.\right)$$

Digitized by Google

Hat man aber die Summe der beiden Parallelen, so findet man die eine, wenn man von der berechneten Summe die gegebene Parallele abzieht $\left(G = \frac{2F}{h} - g \text{ und } g = \frac{2F}{h} - G\right)$.]

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie berechnet man im Trapez: a) die Fläche, [b) die Höhe, c) die Summe der Parallelen, d) die eine Parallele]?
2. Miß einzelne trapezförmige Flächen aus, z. B. die Wände des Kohlenkastens, den Stuhlsitz ꝛc.!
3. Kehr: „Geom. Rechenaufg." S. 19 u. 20 Nr. 1—8.

§ 48. Flächenberechnung des Trapezoides und der unregelmäßigen Vielecke.

Das Trapezoid zerlegt man durch eine Diagonale in 2 Dreiecke, berechnet diese einzeln und addiert sie. Dabei wird man meistens die Diagonale als gemeinschaftliche Grundlinie ansehen und dann als Höhen Lote von den zwei gegenüberliegenden Eckpunkten auf diese Diagonale fällen. — Ebenso zerlegt man das unregelmäßige Vieleck in Diagonaldreiecke (Fig. 93), berechnet und addiert dieselben.

[Um im Felde ein Grundstück, welches die Form eines unregelmäßigen Vielecks hat, auszumessen, ist es zuerst nötig, daß man jeden Eckpunkt des Vielecks durch eine Signalstange bezeichnet. Nachdem man hierdurch ein klares Bild der ganzen Fläche bekommen hat, beurteile man, auf welche Weise sich dieselbe am bequemsten in möglichst wenige, daher in möglichst große*) und in möglichst leicht berechenbare Figuren (in Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze) zerlegen läßt. Man lege zur Sicherheit eine Handzeichnung an, deute darauf die beabsichtigte Zerlegung an und trage in dieselbe die Maßzahlen für die zur Berechnung nötigen Stücke ein. Bei der Messung bedarf es größter Genauigkeit, da ein Fehler von wenigen cm in einer Ausdehnung schon ganz bedeutende Fehler in der Fläche verursachen kann. So entsteht z. B., wenn bei einem 400 m langen Ackerstücke die Breite nur um etwa 2 cm zu gering bestimmt wird, schon ein Fehler von 8 qm. — Ist die Zerlegung der auszumessenden Figur im Freien selbst nicht möglich (z. B. durch Wasser verhindert), so zeichne man die Figur möglichst genau im verjüngten Maßstabe durch Messen der Seiten und Umfangswinkel auf Papier, führe dort die Zerlegung aus, ziehe die nötigen Höhen, messe die Bestimmungsstücke nach demselben verjüngten Maßstabe, berechne die einzelnen Flächenstücke und addiere sie.]

*) Möglichst groß sollen die Teilfiguren sein, weil bei Messung kleiner Figuren trotz größter Sorgfalt mehr Fehler vorkommen, als bei der Ausmessung weniger und größerer Figuren. Von absoluter Genauigkeit kann selbstverständlich niemals die Rede sein. Die so selten scharf geradlinige Grenze, die meist nicht scharfkantigen Grenzsteine oder die so leicht veränderliche Grenzfurche, außerdem die meist wellige Form des Bodens machen dies leicht erklärlich.

Digitized by Google

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

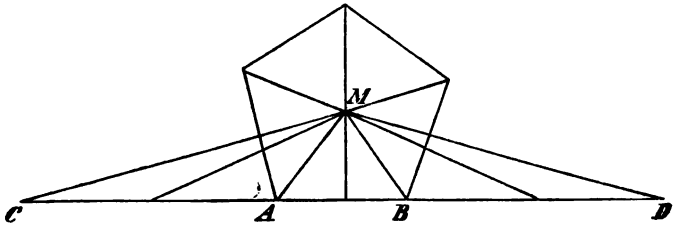
1. Worauf wird die Berechnung eines Trapezoides und eines unregelmäßigen Vielecks zurückgeführt?
2. Zeichne einzelne unregelmäßige Vielecke, zerlege dieselben zweckmäßig, zeichne die nötigen Höhen ein, miß aus und berechne die Gesamtfläche!
3. Kehr: „Geom. Rechenaufg." S. 21 Nr. 10—15.

§ 49. Flächenberechnung der regelmäßigen Vielecke.

a) Wie in § 40 ausgeführt wurde, lassen sich die regelmäßigen Vielecke vom Mittelpunkt aus in soviel kongruente (gleichschenklige) Bestimmungsdreiecke zerlegen, als das Vieleck Seiten hat. Man berechnet daher zuerst ein solches Dreieck, dessen Grundlinie eine Seite des Vielecks und dessen Höhe ein Lot vom Mittelpunkt auf die Seite, ein sogen. Seitenstrahl oder Halbmesser des einzubeschreibenden Kreises ist (kleiner Radius). Der erhaltene Flächeninhalt ist sodann noch mit der Anzahl der Polygonseiten zu multiplizieren $\left(F = \frac{s \cdot h}{2} \cdot n\right)$.

b) Auch folgende anschauliche Entwickelung ist leicht zu behandeln: Man legt die Bestimmungsdreiecke, die um den Mittelpunkt herumliegen, nebeneinander, indem man die Seiten auf der Verlängerung der einen Seite AB (Fig. 106) abträgt. Diese Dreiecke sind dann alle

Fig. 106.



gleich dem Bestimmungsdreieck ABM, da sie gleiche Grundlinie und Höhe haben: So entsteht ein einziges △ CDM, welches den ganzen Umfang zur Grundlinie und den Seitenstrahl (oder kleinen Radius) zur Höhe hat.

Regel: Man findet den Inhalt eines reg. Vielecks, indem man den Umfang mit der Seitenhöhe (dem Seitenstrahl) multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert $\left(F = \frac{U \cdot h}{2}\right)$.

c) Beim Stellen von Aufgaben ist zu bedenken, daß bei jedem reg. Vieleck Seite und kleiner Radius in einem ganz bestimmten Verhältnis zu einander stehen, daß ich also nicht 2 beliebige Zahlen nebeneinander stellen darf. So ist z. B. beim reg. Sechseck der Seitenstrahl stets etwa 0,866 der Seite. Wie dieses Verhältnis für die andern Vielecke bestimmt wird, lehrt die Trigonometrie. Zur praktischen Berechnung hat man Tabellen entworfen, in denen angegeben ist, wievielmal so groß der

Digitized by Google

Flächeninhalt als das Quadrat der betreffenden Vielecksseite ist, so daß man mittels dieser Tabellen auch ohne trigonometrische Kenntnisse die reg. Vielecke schon aus einer Seite berechnen kann (oder auch, wie folgende Tabelle in den Spalten B und C angiebt, aus dem Halbmesser des um das Vieleck beschriebenen Kreises).

Regelmäßige Vielecke.	A. Das Wievielfache ist die Fläche des Vielecks vom Quadrat einer Seite?	B. Das Wievielfache ist die Vielecksseite vom Halbmesser des umbeschriebenen Kreises?	C. Das Wievielfache ist die Fläche des Vielecks vom Radiusquadrat des umbeschriebenen Kreises?
Dreieck	0,43301	1,73205	1,29904
Viereck	1,00000	1,41421	2,00000
Fünfeck	1,72057	1,17557	2,37764
Sechseck	2,59808	1,00000	2,59808
Siebeneck	3,63414	0,86776	2,73640
Achteck	4,82843	0,76537	2,82843
Neuneck	6,18182	0,68404	2,89254
Zehneck	7,69421	0,61803	2,93893
Zwölfeck	11,19615	0,51764	3,00000
Sechzehneck	20,10936	0,39018	3,06148
Zwanzigeck	31,56875	0,31287	3,09017

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie berechnet man den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks a) aus einer Seite und der Seitenhöhe, b) aus dem Umfange und der Seitenhöhe, c) aus der Seite unter Benutzung obiger Tabelle, Spalte A, d) aus dem Winkelstrahl unter Benutzung obiger Tabelle, Spalte C?
2. Kehr: „Geom. Rechenaufg." S. 22 u. 23.

[§ 50. Beziehung zwischen Umfang und Flächeninhalt der Figuren.

Ein Quadrat von 10 m Seitenlänge hat einen Flächeninhalt von $10 \times 10 = 100$ qm. Dasselbe ist dem Flächeninhalte nach einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie 20 m und dessen Höhe 5 m beträgt. Wie verhält es sich aber mit den Umfängen beider Figuren? Das Quadrat hat $4 \times 10 = 40$ m Umfang, das Rechteck dagegen $(2 \times 20) + (2 \times 5) = 40 + 10 = 50$ m Umfang, also einen um 10 m größeren Umfang, als das gleichgroße Quadrat. Wäre das Rechteck 25 m lang und 4 m hoch, so hätte es zwar denselben Flächeninhalt wie die beiden vorigen Figuren; allein es wäre der Umfang $(2 \times 25) + (2 \times 4) = 50 + 8 = 58$ m, also wiederum um 8 m länger, als der Umfang des vorigen Rechtecks u. s. w. Vergleicht man also das Quadrat mit einem gleichgroßen Rechtecke, so hat das Quadrat bei gleichem Flächeninhalte stets den kleinsten Umfang. Gegenteilig könnte man auch sagen: das Quadrat schließt bei dem kleinsten Umfang den größten Flächeninhalt ein. — Die Kenntnis dieser Eigenschaft der Vierecke ist bei vorkommenden Bauten nicht unwichtig, wo man durch quadratförmigen Bau Raum gewinnen und Material und Arbeitslohn ersparen will.

Digitized by Google

Vergleicht man das Rechteck mit einem schiefwinkligen Parallelogramme von gleichem Flächeninhalte, so findet man, daß das erstere einen kleineren Umfang hat als das letztere, wie durch Zeichnung leicht darzuthun ist. Auf einem Acker in Form eines Rechtecks braucht man bei gleicher Bodengüte nicht mehr Samen, als bei einem gleichflächigen Acker in Form eines schiefwinkligen Parallelogramms. Wie steht es aber mit dem Wege, welchen die Pferde beim Pflügen des Ackers gehen, und mit der Zeit, welche sie dabei aufwenden müssen? — Eine Glastafel in Form eines Rechtecks soll denselben Flächeninhalt haben wie eine andere, welche die Form eines Rhomboides hat; wie verhält es sich aber mit den Rahmen beider? Also: Je schiefer das Viereck, desto größer der Umfang.

Zeichne ein gleichseitiges und ein ungleichseitiges Dreieck mit gleicher Grundlinie und Höhe und miß die Umfänge!

Also: Unter allen Dreiecken mit gleichem Flächeninhalt hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Bei regulären geradlinigen Figuren mit gleichem Flächeninhalte überhaupt hat diejenige den kleinsten Umfang, welche die meisten Seiten hat. Wenn z. B. ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat, ein reg. Fünfeck, Sechseck, Siebeneck ꝛc. von je 1 qm Flächenraum gezeichnet werden, so werden die Umfänge dieser Figuren, vom gleichseitigen Dreieck aus gezählt, immer kleiner. (Nicht ohne Bewunderung bemerkt man bei den Bienen, daß sie für ihre Honigbehältnisse das regelmäßige Sechseck wählen, welches seinem Inhalte nach unter allen Figuren, die bei ihrer Zusammensetzung keinen Zwischenraum lassen, die größte ist.) Und schließlich von allen ebenen Figuren mit gleichem Flächenraum hat der Kreis den kleinsten Umfang.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Gieb an, welche Figur bei gleichem Inhalt den kleinsten Umfang hat: a) von allen Dreiecken, b) von allen Vierecken, c) von mehreren geradlinigen reg. Figuren, d) von allen ebenen Figuren!
2. Kehr: „Geom. Rechenaufg." S. 12 Nr. 42, S. 13 Nr. 8 (mit Hilfe der Tabelle); S. 24 Nr. 13, 14, 16, zum Teil allerdings erst nach behandelter Kreislehre zu lösen.]

§ 51. Einige leichtere Aufgaben über Verwandlung und Teilung verschiedener Figuren.

I. Verwandlungsaufgaben: Hierbei gilt es, der Figur eine andere Form zu geben, ohne die Größe zu verändern.

1. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein rechtwinkliges zu verwandeln (s. Fig. 99).

2. Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln: Würden wir ein Dreieck mit gleicher Grundlinie und Höhe, Diagonaldreieck ABD (Fig. 107), zeichnen, so würde dasselbe nur die Hälfte vom Parallelogramm ABCD betragen. Wir müssen also ein doppelt so großes Dreieck als △ ABD zeichnen und zwar dadurch, daß wir

Digitized by Google

die Grundlinie verdoppeln und die Höhe beibehalten, = △ ADE (oder umgekehrt).

Fig. 107.

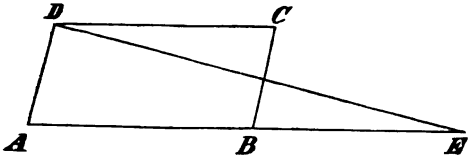
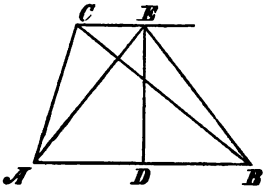


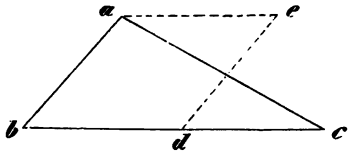
Fig. 108.



3. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln: Damit das gesuchte Dreieck außer der gemeinsamen Grundlinie AB (Fig. 108) auch gleiche Höhe und somit gleichen Flächeninhalt mit △ ABC erhält, muß die Spitze in einer durch C zu AB gezogenen Parallelen liegen. Da ferner die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks senkrecht über der Mitte der Basis liegen muß, so errichten wir in der Mitte von AB eine Senkrechte. Der Schnittpunkt E wird dann die Spitze des verlangten Dreiecks ABE.

4. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln: Ein Parallelogramm mit derselben Grundlinie und Höhe würde doppelt so groß sein als das Dreieck. Wir müssen also ein Parallelogramm zeichnen, welches halb so groß als das angegebene ist, und zwar dadurch, daß wir die Grundlinie halbieren, aber die Höhe beibehalten (oder umgekehrt) (Fig. 109).

Fig. 109.



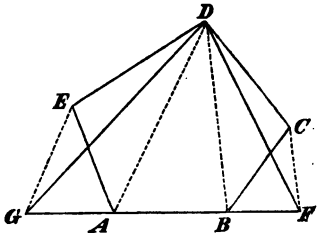
5. Ein Trapez in ein Dreieck zu verwandeln: Fig. 105. Verlängere die untere Parallele um die obere.

6. Ein Trapez in ein Parallelogramm zu verwandeln: Fig. 103. Ziehe eine Parallele durch die Mitte einer Nichtparallelen zu der anderen Nichtparallelen!

7. Ein reg. Vieleck, z. B. ein Fünfeck, in ein Dreieck zu verwandeln: Fig. 106.

8. Ein unregelmäßiges Vieleck, z. B. ein Fünfeck, in ein Dreieck zu verwandeln: Zunächst muß das Fünfeck in ein Viereck verwandelt werden. Wir schneiden durch die Diagonale DB das △ BCD ab und setzen es an der Verlängerung von AB so an, daß dadurch die Ecke B wegfällt. Dies erreichen wir dadurch, daß wir durch C zu DB eine Parallele ziehen und den Schnittpunkt F mit D verbinden; dann ist das neu angesetzte △ BDF = dem abgeschnittenen △ BDC, da es mit ihm gleiche Grundlinie, BD, und gleiche Höhe — das Lot zwischen den Parallelen BD

Fig. 109a.



Digitized by Google

und CF — hat. Somit ist das entstandene Viereck AFDE = dem Fünfeck ABCDE. — Dieses Viereck verwandeln wir nun auf gleiche Weise in ein Dreieck, indem wir das durch die Diagonale AD abzuschneidende △ ADE an der Verlängerung von BA als das ihm gleiche △ ADG ansetzen. Dann ist △ GDF = dem Fünfeck ABCDE.

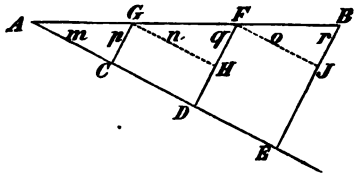
(Kurzer Beweis:
△ABD = ABD
△ADG = ADE | als Dreiecke mit gleicher
△BDF = BDC | Grundlinie u. Höhe;
folglich: △ABD + ADG + BDF = △ABD + ADE + BDC
oder: △GDF = Fünfeck ABCDE.)

Führe bei den Aufgaben Nr. 1—7 ähnlich wie bei Nr. 8 den Beweis dafür, daß die gezeichneten Figuren mit den gegebenen aus gleichen Flächenstücken bestehen, also gleich sind.

II. Teilungsaufgaben: Zur Teilung der Flächen ist die Teilung der Linien nötig. Diese kann mit Hilfe des Metermaßes, aber auch rein geometrisch ausgeführt werden. Die Halbierung siehe § 34 c 2. Die Teilung in jede beliebige andere Anzahl gleicher Teile mag hier noch folgen.

Es soll z. B. die Linie AB (Fig. 109b) in drei gleiche Teile geteilt werden: Man trage unter einem beliebigen (spitzen) Winkel an AB eine andere Linie an, trage auf derselben drei gleiche Stücke ab, AC = CD = DE, verbinde den Endpunkt der letzten Strecke, E, mit dem freien Endpunkte der gegebenen Linie, B, und ziehe aus den übrigen Teilpunkten, D und C, zu dieser Verbindungslinie Parallele, so wird dadurch AB in 3 gleiche Teile zerlegt.

Fig. 109b.



[Zum Beweise ziehe man aus G und F Parallele zu CD und DE, so sind die 3 Dreiecke an AB kongruent nach dem 2. Kongruenzsatz, Teil 2;

denn ∠ m = n = o als Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen,
∠ p = q = r aus demselben Grunde,

und Seite AC = GH = FJ. (Warum?) Folglich sind die homologen Stücke gleich: AG = GF = FB.]

1. Ein Dreieck von der Spitze aus in 5 gleiche Teile zu teilen: Damit 5 Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe entstehen, teilt man die Grundlinie in 5 gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte mit der Spitze.

2. Ein Parallelogramm durch Parallele zu einer Seite in 6 gleiche Teile zu teilen: Damit 6 Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe entstehen, teilt man die Grundlinie in 6 gleiche Teile und zieht aus den Teilpunkten Parallele zu der anstoßenden Seite.

Digitized by Google

Kapitel 7.

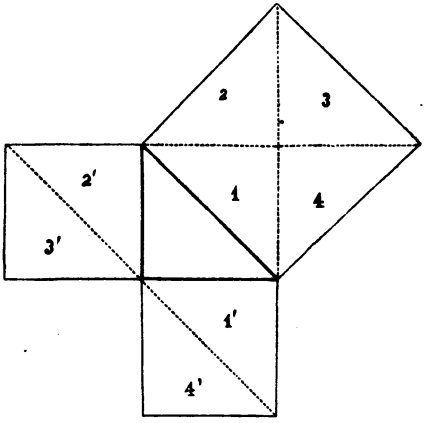
Der Pythagoreische Lehrsatz.

§ 52. Entwickelung des „Pythagoras".

Wiederholungsfragen über das rechtwinklige Dreieck: Was ist ein rechtw. Dreieck? Wie groß sind die beiden spitzen Winkel? Wie groß ist jeder spitze Winkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck? Was ist eine Kathete? die Hypotenuse? Was gilt von der Größe der Hypotenuse, verglichen mit irgend einer Kathete? was aber, verglichen mit der Summe beider Katheten? Jetzt wollen wir ein Gesetz lernen über das Quadrat der Hypotenuse, verglichen mit den beiden Kathetenquadraten.

a) Veranschaulichung am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck: Fig. 110 zeigt, daß das Hypotenusenquadrat durch die Diagonalen in vier Dreiecke zu zerlegen ist, die unter einander und dem ursprünglichen Dreieck kongruent sind, und daß die beiden gleichen Kathetenquadrate zusammen vier ebensolche Dreiecke enthalten. (Ausschneiden und Auflegen eines solchen Dreiecks auf die andern.)

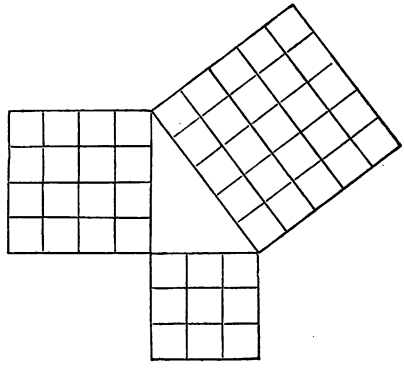
Fig. 110.



Gesetz: Das Hypotenusenquadrat ist gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

b) Veranschaulichung am ungleichseitigen Dreieck, dessen Katheten sich wie 3:4 verhalten: Zeichne einen rechten Winkel; trage auf dem einen Schenkel 3, auf dem andern 4 solche Teile ab; verbinde die Endpunkte; trage die gleichen Teile auf der Hypotenuse ab; es werden genau 5. Errichte auf allen 3 Seiten des Dreiecks Quadrate; teile sämtliche Quadratseiten in die 3, 4 bzw. 5 gleichen Teile und verbinde die gegenüberliegenden Teilpunkte. In wieviel kleinere Quadrate zerfällt das kleinere Kathetenquadrat? (9), das größere? (16), das Hypotenusenquadrat? (25). Vergleiche 25 mit der Summe von 16 + 9. Was gilt also auch hier vom Hypotenusenquadrat?

Fig. 111.



Digitized by Google

[Damit haben wir einen der wichtigsten Lehrsätze der Geometrie gefunden, der nach seinem Entdecker Pythagoras (geb. ums Jahr 580 v. Chr. auf der Insel Samos) der Pythagoreische Lehrsatz — wegen seiner Wichtigkeit auch wohl magister matheseos (der Meister der Mathematik) — genannt wird. Die Sage erzählt, daß Pythagoras nach Entdeckung des nach ihm benannten Lehrsatzes vor Freude dem Jupiter eine Hekatombe (ein Opfer von 100 Stieren) dargebracht habe. „Seit jener Zeit" — sagt man darum scherzweise — „zittern alle Ochsen, sobald eine neue Wahrheit entdeckt wird."]

Statt der Zahlen 3 und 4 für die Katheten, der die Zahl 5 für die Hypotenuse entspricht, könnten auch noch andere Zahlen benutzt werden. Daß alle gleichen Vielfachen von 3, 4 und 5 passend sind, ist selbstverständlich. Man nennt solche Zahlen, bei denen die Quadratzahl der größeren gleich der Quadratsumme der beiden kleineren ist, Pythagoreische Dreieckszahlen. Es folgt hier eine Tabelle von diesen Zahlen, die dem Lehrer bei § 54 zur Bildung solcher Aufgaben dienen kann, bei denen die Rechnung aufgehen soll.

Kath.	Kath.	Hyp.	Kath.	Kath.	Hyp.	Kath.	Kath.	Hyp.
3	4	5	24	32	40	38	360	362
4	3	5	24	45	51	39	52	65
5	12	13	24	70	74	39	252	255
6	8	10	24	143	145	39	760	761
7	24	25	25	60	65	40	30	50
8	6	10	25	312	313	40	75	85
8	15	17	26	168	170	40	96	104
9	12	15	27	36	45	40	198	202
9	40	41	27	120	123	40	399	401
10	24	26	27	364	365	41	840	841
11	60	61	28	21	35	42	56	70
12	9	15	28	96	100	42	144	150
12	16	20	28	195	197	42	440	442
12	35	37	29	420	421	43	924	925
13	84	85	30	40	50	44	33	55
14	48	50	30	72	78	44	240	244
15	20	25	30	224	226	44	483	485
15	36	39	31	480	481	45	60	75
15	112	113	32	24	40	45	108	117
16	12	20	32	60	68	45	200	205
16	30	34	32	126	130	45	336	339
16	63	65	33	44	55	45	1012	1013
17	144	145	33	180	183	46	528	530
18	24	30	33	255	257	47	1104	1105
18	80	82	33	544	545	48	36	60
19	180	181	34	288	290	48	64	80
20	15	25	35	84	91	48	90	102
20	48	52	35	120	125	48	140	148
20	99	101	35	612	613	48	189	195
21	28	35	36	27	45	48	286	290
21	72	75	36	48	60	48	575	577
21	220	221	36	105	111	49	168	175
22	120	122	36	160	164	49	1200	1201
23	264	265	36	323	325	50	120	130
24	18	30	37	684	685	50	624	626

Digitized by Google

[c) Veranschaulichung für jedes beliebige ungleichseitig-rechtwinklige Dreieck: Wenn in Fig. 112 A das rechtwinklige Dreieck, B und C die Quadrate der beiden Katheten sind, so klappe man das Dreieck A um, so daß es a deckt; dann lege man es so, daß es b, dann c, dann daß es d deckt. Schneidet man nun die auf Pappe gezeichneten Dreiecke aus, so bleibt noch das Quadrat e übrig (dessen Seite nichts anderes ist, als der Unterschied zwischen den Katheten des Dreiecks A). — Diese 5 Bestandteile, welche das Hypotenusenquadrat bilden, ordne man nun in anderer Weise an, indem man die vier Dreiecke a, b, c, d (s. Fig. 112) nicht mit den Katheten — wie es oben der Fall war —, sondern mit den Hypotenusen zusammenlegt (Fig. 113). Man lege zuerst das Dreieck a und daran das Dreieck b, so daß die Hypotenusen zusammenfallen. Daran stelle man das Dreieck c und an dieses das Dreieck d, ähnlich wie vorhin. So erhält man zwei Rechtecke von gleicher Größe. Setzt man endlich noch das Quadrat e an (s. Fig. 113), so bilden alle fünf Teile des Hypotenusenquadrats eine unregelmäßige Figur, welche sich aber wieder in die beiden Quadrate B und C zerlegen läßt, und diese sind gleich den beiden Kathetenquadraten B und C in Fig. 112, was man durch Aufeinanderlegen leicht erkennen kann. — Somit ist der Pythagoreische Lehrsatz für alle Fälle anschaulich erwiesen.]

Fig. 112.

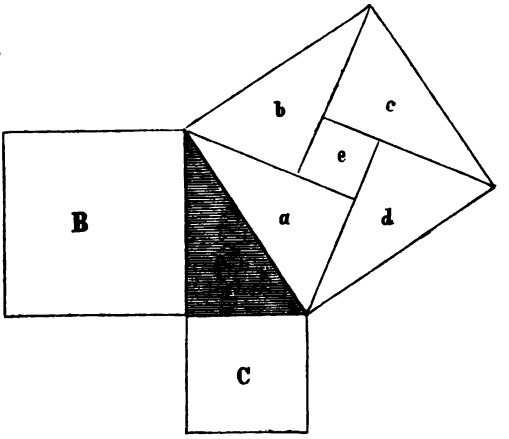
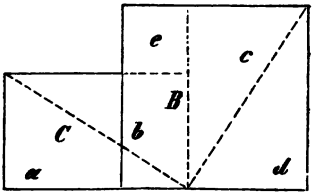
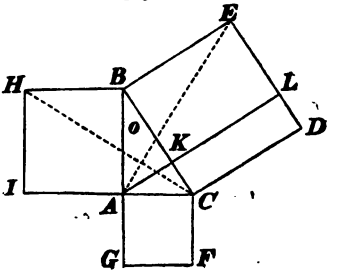


Fig. 113.



[d) Begründung: Von den vielen wissenschaftlichen Beweisen des „Pythagoras" ist der nach dem Mathematiker Euklides benannte Euklidische Beweis derjenige, welcher sich in den meisten Lehrbüchern der Geometrie vorfindet. Bei geförderteren Schülern wird es nicht schwer halten, ihn zum Verständnis zu bringen; er möge deshalb auch hier seine Stelle finden (Fig. 114). Man fälle aus dem Scheitel des rechten Winkels A ein Lot AK auf die Hypotenuse und verlängere es bis L. Dadurch wird das Quadrat

Fig. 114.



Digitized by Google

BCDE in zwei Rechtecke BKLE und CKLD geteilt, von denen zu beweisen ist, daß jedes demjenigen Quadrate gleich ist, das mit ihm zusammenstößt, nämlich: BKLE = $\overline{AB^2}$ und CKLD = $\overline{AC^2}$.

Um zu erweisen, daß Rechteck BKLE = $\overline{AB^2}$ ist, ziehe man die Hilfslinien AE und CH. Dadurch erhält man zwei Dreiecke ABE und HBC, die einander kongruent sind. Es ist nämlich:

AB = BH (als Seiten desselben Quadrates),
BE = BC (aus demselben Grunde)
und der Winkel ABE = HBC, weil beide = 1 R + o sind;
folglich ist Dreieck ABE ≅ HBC. (1. Kongruenzsatz.)

Es ist ferner das Dreieck ABE = $^1/_2$BKLE, weil sie einerlei Grundlinie BE haben und zwischen denselben Parallelen BE und AL stehen, also auch gleiche Höhe haben, und das Dreieck HBC = $^1/_2$ABHI, weil sie einerlei Grundlinien BH haben und zwischen denselben Parallelen BH und CI stehen. Da nun die Dreiecke ABE und HBC einander gleich sind, so ist auch $^1/_2$BKLE = $^1/_2$ABHI. Wenn aber die Hälften zweier Größen gleich sind, so sind es auch die Ganzen; folglich ist

Rechteck BKLE = $\overline{AB^2}$.

Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß Rechteck CKLD = $\overline{AC^2}$ ist; man braucht nur eine Linie von A nach D und eine von B nach F zu ziehen.

Die beiden Rechtecke BKLE und CKLD aber machen das Quadrat der Hypotenuse aus; folglich ist dieses Quadrat den Quadraten der beiden Katheten, $\overline{AB^2}$ und $\overline{AC^2}$ zusammengenommen, gleich.]

e) Folgerungen: 1. Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat doppelt so groß als ein Kathetenquadrat und ein Kathetenquadrat gleich der Hälfte des Hypotenusenquadrats.

2. Das Quadrat über der Diagonale eines Quadrats ist doppelt so groß als dieses selbst, und umgekehrt: Ein Quadrat ist halb so groß als das Quadrat über seiner Diagonale. (Was für ein rechtwinkliges Dreieck ist nämlich das Diagonaldreieck eines Quadrats?)

3. Da beide Kathetenquadrate zusammen gleich dem Hypotenusenquadrate sind, so ist ein Kathetenquadrat gleich dem Hypotenusenquadrat vermindert um das andere Kathetenquadrat (oder gleich der Differenz zwischen beiden).

[4. Aus dem Euklidischen Beweise des „Pythagoras" folgt, daß jedes Kathetenquadrat gleich dem Rechteck ist, welches aus der ganzen Hypotenuse und dem anstoßenden, durch die Höhe entstandenen Hypotenusenabschnitt gebildet wird.]

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was gilt in jedem rechtwinkligen Dreieck vom Hypotenusenquadrat?
2. Erkläre die in § 18 angeführte Art, wie sich oft Maurer- und Zimmerleute einen rechten Winkel herstellen! (Sie fügen drei Stangen, welche drei, vier und fünf Längenteile haben, zu einem Dreieck zusammen.)
3. Vergleiche das Hypotenusenquadrat eines gleichschenklig-rechtwinkligen

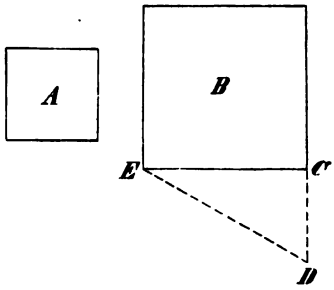
Digitized by Google

Dreiecks mit einem Kathetenquadrat, ferner irgend ein Quadrat mit dem Quadrat über seiner Diagonale!

§ 53. Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes zu einzelnen Konstruktionsaufgaben.

1. Ein Quadrat zu zeichnen, das so groß ist wie zwei gegebene Quadrate zusammengenommen: Sehen wir die beiden gegebenen Quadrate A und B (Fig. 115) als Kathetenquadrate an; was muß dann das gesuchte Quadrat dazu werden? Wir müssen also die beiden Quadratseiten als Katheten rechtwinklig aneinandersetzen und die Hypotenuse DE ziehen, so ist ein Quadrat darüber das verlangte. — Sind mehr als zwei Quadrate gegeben, so setze man zunächst die Seiten zweier Quadrate aneinander und ziehe die Hypotenuse, setze an diese die Seite des dritten Quadrates rechtwinklig an und ziehe abermals die Hypotenuse, welche die Seite desjenigen Quadrates ist, welches so groß ist, als die drei ersten Quadrate zusammengenommen, u. s. f.

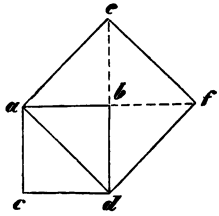
Fig. 115.



2. Die Differenz zweier Quadrate als ein Quadrat darzustellen: Als was ist das größere Quadrat aufzufassen? das kleinere? Was muß das gesuchte Quadrat werden? (Das andere Kathetenquadrat.) Wir müssen also ein rechtwinkliges Dreieck aus Hypotenuse und einer Kathete (nach dem 4. Kongruenzsatze) zeichnen, dann ist das Quadrat über der erhaltenen anderen Kathete das verlangte.

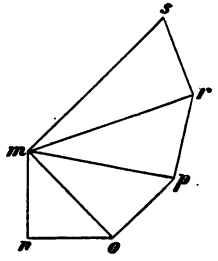
3. Ein Quadrat zu zeichnen, das doppelt so groß als ein gegebenes ist: Vgl. § 52e 2. Über welcher Linie des Quadrats brauchen wir also nur ein Quadrat zu errichten? (Diagonale.) (Fig. 116.) — Gewöhnlich meint der Schüler, er müsse über der doppelten Quadratseite ein Quadrat errichten. Man lasse ihn dies ausführen, damit er sich überzeugt, daß das neue Quadrat viermal so groß als das gegebene ist. — Wie findet also z. B. ein Tischler die Länge einer quadratischen Tischplatte, welche doppelt so viel Flächenraum haben soll, als eine andere?

Fig. 116.



4. Jedes andere Vielfache eines Quadrates kann man durch wiederholtes Ansetzen der Quadratseite unter rechtem Winkel erhalten. Ist z. B. in Fig. 117 mn = no = op = pr = rs die Seite des gegebenen einfachen Quadrates, so ist mo die Seite des doppelten, mp die Seite des dreifachen,

Fig. 117.



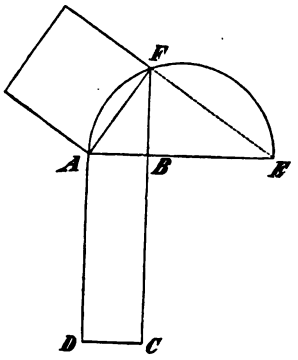
Digitized by Google

mr die Seite des vierfachen, ms die Seite des fünffachen Quadrates.

Das 3fache erhält man auch durch Zusammensetzung des 2fachen und 1fachen (Aufg. 1 und 3);
das 4fache durch ein Quadrat über der doppelten Quadratseite;
das 5fache durch Zusammensetzung des 4fachen und 1fachen;
das 6fache durch Zusammensetzung des 4fachen und 2fachen;
das 7fache durch Zusammensetzung des 4fachen, 2fachen und 1fachen;
das 8fache durch ein Quadrat über der Diagonale des 4fachen Quadrates;
das 9fache durch ein Quadrat über der 3fachen Quadratseite;
wie das 16-, 25-, 36fache?

[5. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln: Vgl. § 52 e 4. Die größere Seite des Rechtecks muß Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, die kürzere Rechtecksseite der eine durch die Höhe gebildete Hypotenusenabschnitt werden. Dann ist das Quadrat der anstoßenden Kathete das verlangte (Fig. 118). Damit die Linie AE, die gleich der größeren Rechtecksseite AD gemacht worden ist, Hypotenuse wird, muß über AE ein rechter Winkel ausgespannt werden, und dies geschieht, indem man über AE als Durchmesser einen Halbkreis schlägt. (Begründung dafür, daß der Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter ist, folgt erst in § 62, V.) Da AB ein durch die Höhe gebildeter Hypotenusenabschnitt werden soll, so muß der Scheitel des rechten Winkels senkrecht über B liegen. Ich verlängere darum die Senkrechte BC über B hinaus und verbinde den Schnittpunkt F mit A, so ist das Quadrat über der Kathete AF im rechtwinkligen △ AFE gleich dem gegebenen Rechteck.]

Fig. 118.



[6. Ein schiefwinkliges Parallelogramm muß zum Zweck der Verwandlung in ein Quadrat erst in ein Rechteck verwandelt werden, ein Dreieck und ein Trapez noch vorher in ein schiefwinkliges Parallelogramm, ein Vieleck in ein Dreieck und dieses dann in ein Quadrat (vgl. § 51, I).]

[7. Mit Hilfe der Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat kann man nun auch jeden beliebigen Teil eines Quadrates wieder als Quadrat darstellen, z. B. $^3/_5$, indem man eine Seite in fünf gleiche Teile teilt, im dritten Teilpunkt ein Lot errichtet und das dadurch entstandene Rechteck, das $^3/_5$ des Quadrates ist, in ein Quadrat verwandelt. — Sind die Brüche Quadratzahlen, so bedarf es dessen nicht; z. B. $^1/_9$, $^4/_{25}$, $^{16}/_{49}$ eines Quadrates erhalte ich durch ein Quadrat über $^1/_3$, $^2/_5$, $^4/_7$ der Quadratseite.] — Für fortgeschrittenere Schüler ließe sich

Digitized by Google

die Zahl derartiger Aufgaben leicht durch Kombinationen vermehren; jedoch bieten schon die Aufgaben 4—7 einige Schwierigkeiten.

§ 54. Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes zu geometrischen Rechenaufgaben (über das rechtwinklige Dreieck).

Die meisten hierhergehörigen Aufgaben sind auf folgende zwei zurückzuführen:

I. Berechnung der Hypotenuse aus beiden Katheten: Die eine Kathete betrage 8 m, die andere 15 m; die Hypotenuse ist zu berechnen. Berechne den Inhalt der beiden Kathetenquadrate! (64 und 225 qm.) Wie groß ist demnach das Hypotenusenquadrat? (289 qm.) Wie groß ist dann eine Seite dieses Quadrates oder die Hypotenuse selbst? ($\sqrt{289} = 17$ m.)

Regel: Man findet die Hypotenuse, indem man die beiden Kathetenquadrate addiert und aus der Summe die Wurzel zieht. ($h = \sqrt{m^2 + n^2}$, wenn m und n die beiden gegebenen Katheten bedeuten.)

II. Berechnung einer Kathete aus der Hypotenuse und der anderen Kathete: Die Hypotenuse betrage 13 m, die eine Kathete 5 m; die andere Kathete ist zu berechnen. Berechne das Hypotenusenquadrat! (169 qm.) Wie groß ist das eine Kathetenquadrat? (25 qm.) Wieviel bleibt noch für das andere Kathetenquadrat übrig? (144 qm.) Wie groß ist dann die Seite dieses Quadrates oder die andere Kathete selbst? (12 m.)

Regel: Man findet eine Kathete, indem man vom Hypotenusenquadrat das Quadrat der gegebenen Kathete abzieht und aus dem Reste die Wurzel zieht. ($m = \sqrt{h^2 - n^2}$ und $n = \sqrt{h^2 - m^2}$.)

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie findet man im rechtwinkligen Dreieck: a) die Hypotenuse aus beiden Katheten, b) eine Kathete aus der Hypotenuse und der anderen Kathete?
2. Wie findet man im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck: a) die Hypotenuse aus einer Kathete, b) eine Kathete aus der Hypotenuse?
3. Wie findet man im Quadrate: a) die Diagonale aus einer Seite, b) eine Seite aus der Diagonale?
4. Wie findet man im Rechteck: a) die Diagonale aus Länge und Breite, b) die Länge aus Diagonale und Breite?
5. Wie findet man in der Raute aus den beiden (ungleichen) Diagonalen die Seiten und somit den Umfang? (Vgl. § 38, II.)
6. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 15—17.

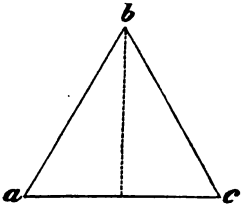
§ 55. Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes zur Berechnung des gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecks.

I. Das gleichseitige Dreieck: Mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes kann man das gleichseitige Dreieck schon aus der Länge einer Seite be-

Digitized by Google

rechnen, ohne erst die Höhe messen zu müssen. Aus der Seite des gleichseitigen Dreiecks kann zunächst seine Höhe und aus beiden der Flächeninhalt durch Berechnung gefunden werden.

Fig. 119.



Fällt man nämlich in einem gleichseitigen Dreiecke ein Lot auf eine Seite, so wird diese halbiert, und es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke. In jedem derselben ist die Hypotenuse (nämlich die Seite des Dreiecks) und die eine Kathete (die halbe Dreiecksseite) bekannt; folglich kann man die andere Kathete, d. i. die Höhe, berechnen. Ist z. B. die Seite des Dreiecks = 20 m, so beträgt die Höhe $\sqrt{400-100} = \sqrt{300} = 17{,}32$ m und der Flächeninhalt demnach $\frac{17{,}32 \cdot 20}{2} = 173{,}2$ qm.

[Bei genügender Zeit kann man auch das feststehende Verhältnis zwischen Höhe und Seite, zwischen Flächeninhalt und Seitenquadrat entwickeln: die Seite des gleichseitigen Dreiecks sei 1 m, dann ist die Höhe $= \sqrt{1^2-(1/2)^2} = \sqrt{1-1/4} = \sqrt{3/4} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$. Also ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks $^{866}/_{1000}$ der Seite oder verhält sich zu ihr = 866:1000, die Seite ist daher wieder $^{1000}/_{866}$ der Höhe. — Die Fläche ist $\frac{1 \cdot 0{,}866}{2} = 0{,}433$ qm, das Quadrat der Seite aber $1 \cdot 1 = 1$ qm. Also ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks $^{433}/_{1000}$ des Quadrats über einer Seite oder verhält sich zu ihm = 433:1000; daher das Seitenquadrat wieder $^{1000}/_{433}$ des Flächeninhalts vom gleichseitigen Dreieck.]

Da das regelmäßige Sechseck aus 6 gleichseitigen Dreiecken besteht, so kann auch dessen Inhalt aus einer Seite berechnet werden.

II. Das gleichschenklige Dreieck: Auch im gleichschenkligen Dreieck (Fig. 120) wird die Grundlinie durch ein von der Spitze auf sie gefälltes Lot halbiert und dadurch das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Dadurch ergiebt sich auch unter Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes von selbst aus einem der gleichen Schenkel und der halben Grundlinie die Höhe und somit auch der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks. Es sei z. B. jeder der gleichen Schenkel = 6 m, die Grundlinie = 10 m, so beträgt die Höhe $\sqrt{36-25} = \sqrt{11} = 3{,}3166$ m, und der Flächeninhalt des Dreiecks ist demnach $= \frac{10 \cdot 3{,}3166}{2} = 16{,}583$ qm.

Fig. 120.

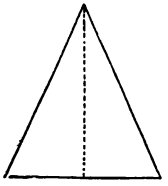
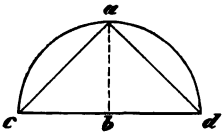


Fig. 121.



III. Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck: Fällt man hier das Lot von der Spitze auf die Grundlinie, so beträgt der halbe Winkel an der Spitze 45°, der Basiswinkel aber auch 45° (Fig. 121).

Digitized by Google

Die beiden entstandenen Dreiecke müssen also wieder gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke und die Höhe ab daher gleich der halben Basis bc sein. Man braucht daher nur die Grundlinie zu messen, so ist die Hälfte davon die Höhe und das halbe Produkt aus beiden der Flächeninhalt.

[IV. Das ungleichseitige Dreieck: Unter Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes kann man auch eine bequeme Formel für die Flächenberechnung des ungleichseitigen Dreiecks aus seinen drei Seiten entwickeln. Wegen ihres praktischen Zweckes (für den Fall, daß die Höhe nicht meßbar ist), möge sie hier angeführt werden. Die Begründung ist allerdings für unsere Zwecke zu schwierig. Nennt man die Dreiecksseiten a, b, c und ihre halbe Summe oder den halben Umfang, also $\frac{a+b+c}{2} = s$, so lautet die Flächenformel:

$$F = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}.$$

Z. B.: Ein Teich ist dreieckig; die drei Uferseiten betragen 130, 200 und 210 m; wie groß ist der Wasserspiegel des Teiches?

$$s = \frac{130+200+210}{2} = 270,$$
$$s-a = 270-130 = 140,$$
$$s-b = 270-200 = 70,$$
$$s-c = 270-210 = 60,$$
$$F = \sqrt{270.60.70.140} = 12600 \text{ qm}$$
$$= 1{,}26 \text{ ha.}]$$

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was braucht nur gegeben zu sein: a) zur Berechnung des gleichseitigen, b) des gleichschenkligen (spitz- oder stumpfwinkligen), c) des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks?
2. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 17 und 18.

Kapitel 8.

Von der Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

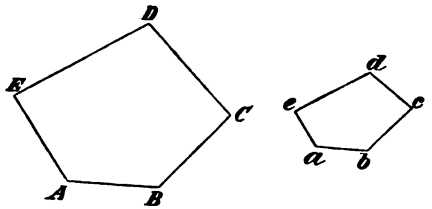
§ 56. Die Ähnlichkeit der Figuren im allgemeinen und der Dreiecke im besonderen.

I. Begriff der Ähnlichkeit: In § 30 ist bereits die Ähnlichkeit als Übereinstimmung zweier Figuren in ihrer Form erläutert worden. Suchen wir jetzt näher zu erörtern, worin diese Übereinstimmung der Form begründet ist. Hinweis auf die Wandkarte und die Atlaskarte z. B. von Deutschland (oder Zeichnung an der Wandtafel und im Zeichenheft). Beide stimmen augenscheinlich in der Form überein. Bei beiden machen die Grenzen und hineingezeichneten Flüsse genau dieselben Biegungen oder Winkel. In der Größe sind sie völlig verschieden. Wenn aber z. B. die Südgrenze der Wandkarte 4 mal so groß als die im Atlas ist, so ist dies auch bezüglich der Ost- und jeder anderen

Digitized by Google

Grenze der Fall; desgl. ist z. B. der Lauf der Elbe dort 4mal so lang gezeichnet als hier. — Übertragen wir dies auf zwei geometrische geradlinige Figuren. Der Lehrer zeige oder zeichne z. B. zwei ähnliche unregelmäßige Fünfecke, um daraus die einzelnen Momente des geometrischen Begriffes der Ähnlichkeit festzustellen (Fig. 122). Beide erscheinen uns in ihrer Form völlig übereinstimmend, also ähnlich. Von wieviel Seiten werden beide eingeschlossen? (Ein Viereck kann nicht einem Fünfeck ähnlich sein.) Also müssen ähnliche Figuren:

Fig. 122.



1) in der Anzahl der Seiten übereinstimmen. Vergleichen wir die Winkel beider Fünfecke der Reihe nach, so finden wir auch darin Übereinstimmung. Also stimmen:

2) ähnliche Figuren in den Winkeln überein. — Dagegen die Seiten sind ungleich. Wie würden sonst die Figuren bei Übereinstimmung der Seiten und Winkel sein müssen? Vergleiche AB und ab! Unsere Figur ergiebt, daß AB $1\frac{1}{2}$mal so groß als ab ist. Welches Verhältnis finden wir auch zwischen BC und bc und ebenso zwischen den anderen gleichgelegenen Seiten? Zur Ähnlichkeit gehört also:

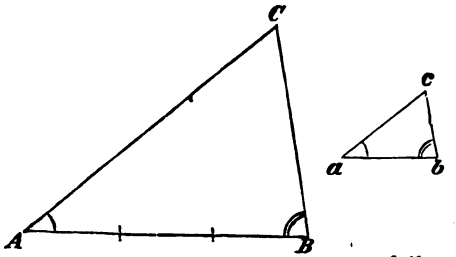
3) daß die gleichgelegenen Seiten (d. h. solche, die gleichen Winkeln gegenüberliegen) in gleichem Verhältnis zu einander stehen. Da die Übereinstimmung in der Seitenzahl als selbstverständlich gilt, so genügt es zu sagen: Figuren sind ähnlich, wenn ihre Winkel der Reihe nach gleich sind und ihre Seiten in gleichem Verhältnis zu einander stehen. (Daß die Gleichheit der Winkel allein noch nicht die Ähnlichkeit bedingt, ist z. B. an einem Quadrat und einem Rechteck zu zeigen. Beide stimmen in den Winkeln überein und sind doch ganz verschieden in der Form. Daß auch das gleiche Seitenverhältnis an sich noch nicht die Ähnlichkeit bewirkt, zeigt z. B. der Vergleich zwischen einem Quadrat und einer Raute, deren vier Seitenpaare ja in demselben Verhältnis zu einander stehen.) — Es fragt sich nun, ob man bei zwei Figuren, deren Ähnlichkeit festgestellt werden soll, der obigen Erklärung gemäß immer alle Winkel und alle Seiten vergleichen muß. Zwei Quadrate z. B. stimmen stets in allen Winkeln überein, und da in jedem die vier Seiten gleich sind, so steht jedes Seitenpaar beider Quadrate in demselben Verhältnis wie ein anderes. Daher sind Quadrate stets ähnlich; dasselbe gilt von zwei gleichseitigen Dreiecken, überhaupt von zwei regelmäßigen Figuren mit gleicher Seitenzahl.

II. Ähnlichkeit der Dreiecke: Zur Feststellung der Ähnlichkeit zweier Dreiecke giebt es nun vier „Ähnlichkeitssätze", die den vier Kongruenzsätzen entsprechen. Wir wollen hier den einfachsten und zugleich wichtigsten besprechen. Zeichne zwei Linien in einem bestimmten

Digitized by Google

Längenverhältnis, etwa wie 1:3 (Fig. 123). Trage an der ersten in den beiden Endpunkten A und B zwei Winkel an, deren Schenkel sich in C treffen, und an der zweiten in Punkt a und b dieselben Winkel, so entstehen zwei Dreiecke, die nach der Konstruktion in zwei Winkeln übereinstimmen. Warum müssen sie dann auch im dritten Winkel übereinstimmen? (§ 27 3 c). Vergleichen wir die Seitenpaare, so finden wir, daß auch die zwei anderen in demselben Verhältnis stehen wie das erste, hier wie 1:3. Daraus ergiebt sich der Ähnlichkeitssatz: Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen*).

Fig. 123.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

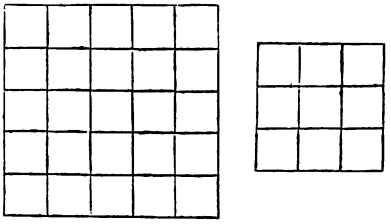
1. Wann sind Figuren ähnlich?
2. Warum sind alle regelmäßigen Vielecke von gleicher Seitenzahl, z. B. regelmäßige Fünfecke, ähnlich?
3. Nenne einen (den zweiten) „Ähnlichkeitssatz" über die Dreiecke!
4. Zwei ähnliche Dreiecke stehen in dem Seitenverhältnis 3:5. Die Grundlinie des kleineren Dreiecks beträgt 18 m; wie groß ist die des größeren Dreiecks?

$$\left(\begin{array}{l} 3 \text{ Teile} = 18\,\text{m}; \text{ oder } 3:5 = 18:x. \\ 5 \text{ Teile} = \ ? \end{array}\right)$$

§ 57. Flächenverhältnis ähnlicher Figuren.

a) Veranschaulichung an zwei Quadraten: Zeichne zwei Quadrate, deren Seiten sich wie 3:5 verhalten (Fig. 124). Ziehe aus den Teilpunkten Parallele, so zerfällt das kleinere Quadrat in 9, das größere in 25 gleiche Quadrate; also verhalten sich die Flächen der Quadrate = 9:25, d. i. $= 3^2:5^2$.

Fig. 124.



*) Eine eigentliche Beweisführung würde zu weit führen. Die anderen Ähnlichkeitssätze könnten, wenn sie notwendig erscheinen sollten, auf gleiche Weise veranschaulicht werden; sie mögen hier nur aufgezählt werden: Dreiecke sind ähnlich,

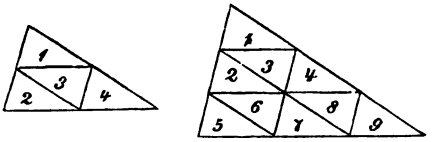
1) wenn zwei Seitenpaare in gleichem Verhältnis stehen (proportioniert sind) und die eingeschlossenen Winkel gleich sind;
2) wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen;
3) wenn alle drei Seitenpaare in gleichem Verhältnis stehen;
4) wenn zwei Seitenpaare im gleichen Verhältnis stehen und die Gegenwinkel der größeren Seiten gleich sind.

Digitized by Google

Gesetz: Zwei Quadrate verhalten sich wie die Quadratzahlen ihrer Seitenlängen.

b) **Veranschaulichung an zwei ähnlichen Dreiecken:** Man zeichne zwei ähnliche Dreiecke, deren Seiten sich wie 2:3 verhalten, und ziehe aus den Teilpunkten Parallele (Fig. 125), so zerfällt das kleinere in vier, das größere in neun kongruente kleine Dreiecke; also verhalten sich die Flächeninhalte wie 4:9, d. i. $= 2^2 : 3^2$.

Fig. 125.



Gesetz: Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichgelegenen Seiten.

Dasselbe gilt von allen ähnlichen Figuren, da diese sich wieder durch Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen lassen. Daraus folgt wieder: Sind die Flächen zweier ähnlichen Figuren (oder ihr Verhältnis) bekannt, so verhalten sich zwei gleichgelegene Seiten wie die Wurzeln aus den Flächen.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie verhalten sich die Flächen ähnlicher Figuren?
2. Wie verhalten sich zwei gleichgelegene Seiten in ähnlichen Figuren, deren Flächenverhältnis bekannt ist?
3. Ein Kartenmaßstab (— auf die linearen Ausdehnungen zu beziehen —) lautet 1:10000. Wievielmal so groß ist die betreffende Erdfläche als die Kartenfläche? (100 000 000.)
4. Ein Mikroskop vergrößert eine Linie 80 mal; wievielmal wird dann eine Fläche vergrößert?
5. Wievielmal so groß muß ich die Seiten einer Figur zeichnen, wenn dieselbe einen 25mal so großen Flächeninhalt bekommen soll?
6. Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich in ihren Seiten wie 4:5. Das kleinere hat 48 qm; wieviel das größere?

   (Flächenverhältnis 16:25; 16 Teile = 48 qm
   25 Teile = ?)

7. Von zwei ähnlichen Dreiecken ist das eine $2\frac{1}{4}$ mal so groß als das andere. Die Grundlinie des kleineren beträgt 5 m, wie viel die des größeren?

   (Flächenverhältnis $1:2\frac{1}{4} = 4:9$, Seitenverhältnis daher $= 2:3$; 2 Teile = 5 m
   3 Teile = ?)

§ 58. Konstruktionsaufgaben auf Grund der Ähnlichkeit.

Soll ein Dreieck ähnlich abgezeichnet werden, im vergrößerten oder im verkleinerten Maßstabe, so ist dies am leichtesten auf Grund des in § 56 angeführten 2. Ähnlichkeitssatzes auszuführen. Man zeichnet eine Seite, die zu der entsprechenden Seite des gegebenen Dreiecks in dem vorgeschriebenen Verhältnis steht, und trägt die beiden Winkel an, die dieser Seite anliegen. Sind andere Stücke als eine Seite und deren anliegende Winkel zugänglich, so hat man nach einem anderen der vier Ähnlichkeitssätze zu verfahren. (S. § 56, Bemerk.) — Zum Abzeichnen

Digitized by Google

von Vielecken zerlegt man diese in Diagonaldreiecke und zeichnet diese einzeln der Reihe nach ab; oder man zeichnet eine Seite AB (Fig. 122) in dem bestimmten Verhältnis ab, trägt daran die anliegenden Winkel A und B an, setzt die Schenkel ae und kc wieder in das gleiche Verhältnis zu den Seiten AE und BC des gegebenen Vielecks, trägt daran die folgenden Winkel an, u. s. f. bis zu Ende.

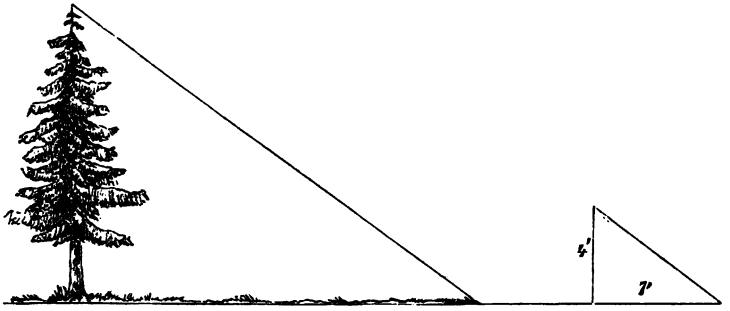
Aufgaben.

1. Zeichne ein Dreieck, das einem gegebenen ähnlich ist, so daß sich die Seiten des gegebenen zu denen des verlangten: a) wie 2:3, b) wie 5:2 verhalten! (Zu a: Teile eine Seite des Dreiecks in zwei Teile; zeichne eine Linie, die drei solche Teile enthält ꝛc.)
2. Zeichne ein Sechseck, das einem gegebenen ähnlich ist, so daß die Seiten $1\frac{1}{2}$mal so groß als die des gegebenen werden!
3. Zeichne ein Dreieck, das einem gegebenen ähnlich, aber an Fläche nur $^4/_9$ von dem gegebenen ist! (Seitenverhältnis?)

[§ 59. Anwendung der Ähnlichkeitssätze zu Messungen im Freien.

I. Höhenmessungen: 1. Die Höhe eines Baumes mittelst seines Schattens zu messen (Fig. 126): Man stecke eine

Fig. 126.



Stange lotrecht in die Erde, messe dieselbe vom Erdboden ab, messe ferner den Schatten des Stabes und den des Baumes. Es seien dieselben der Reihe nach 4 m, 7 m und 42 m. Die beiden entstandenen Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein (den rechten Winkeln am Fußpunkt des Baumes und des Stabes, und in den Winkeln, welche die parallelen Sonnenstrahlen mit dem wagerechten Erdboden bilden), sind daher ähnlich. Mithin stehen alle gleichliegenden Seiten in demselben Verhältnis; also verhält sich der Stabschatten zum Baumschatten wie die Stabhöhe zur Baumhöhe, hier also $7:42 = 4:x$ oder als Regeldetri-Ansatz:

Bei 7 m Schatten 4 m Höhe.
Bei 42 m Schatten ? m Höhe.

Ergebnis: 24 m.

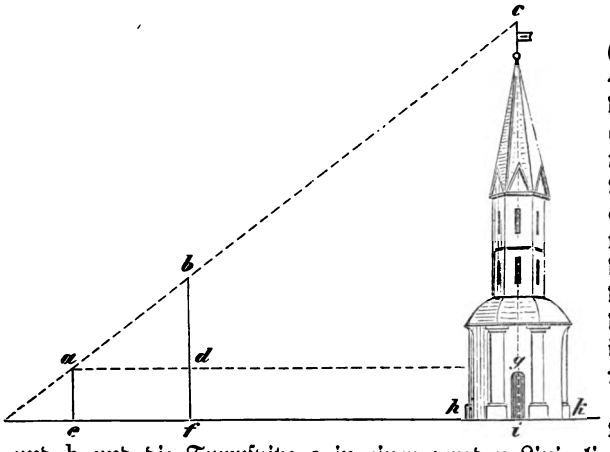
Wie hoch muß die Sonne am Himmel stehen oder unter was für einem Winkel müssen die Sonnenstrahlen auffallen, wenn der Schatten

Digitized by Google

gerade so groß ist wie der schattenwerfende Gegenstand? (Das Dreieck muß ein gleichschenklig-rechtwinkliges werden.)

2. Die Höhe eines Turmes auch bei trübem Himmel, also ohne Benutzung des Schattens zu bestimmen.

Fig. 127.



Lösung a: Man stelle den Stab bf (Fig. 127), der 4 m lang über der Erde ist, in einer bestimmten Entfernung von dem Turme ci; dann stelle man einen anderen Stab ae, der 1,5 m über der Erde lang ist, so weit zurück, bis die oberen Endpunkte der Stäbe a und b und die Turmspitze c in einer geraden Linie liegen, und messe dann die Entfernung fi, sowie die der beiden Stäbe ef. Gesetzt nun, es sei die Entfernung von e bis zum Turme h = 65 m, die Breite des Turmes von h bis k = 10 m, also die halbe Breite (hi) = 5 m, also die ganze Länge von e bis i = 65 + 5 = 70 m; gesetzt, es sei ferner die Entfernung von f bis e = 3,5 m, so verhält sich ad : ag = bd : cg, da △ abd ∞ acg ist,

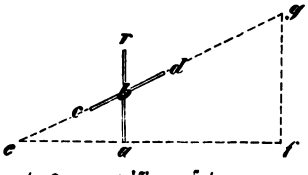
hier also: 3,5 : 70 = 2,5 : x

$$x = \frac{70 \times 2{,}5}{3{,}5} = 50\,\text{m}.$$

Oder: 70 ist von 3,5 das 20fache, also ist auch x das 20fache von 2,5 = 50 m. Addiert man hierzu die Höhe gi = ae = 1,5 m, so erhält man die Turmhöhe = 51,5 m.

Lösung b: Man kann sich auch der in Fig. 128 abgebildeten einfachen Vorrichtung bedienen, bestehend in einer ungefähr 2 m langen Stange, an welche man bei b ein etwa 1,5 m langes bewegliches Lineal (noch besser ein Blasrohr oder Visierrohr) einschraubt. Den Stab stecke man senkrecht in die Erde und richte nun das Lineal (Rohr) nach der Spitze des zu messenden Gegenstandes, g, visiere sodann nach rückwärts in der Richtung des Lineals (oder durch das Rohr) bis auf die Erde und erhält dadurch den Punkt e.

Fig. 128.

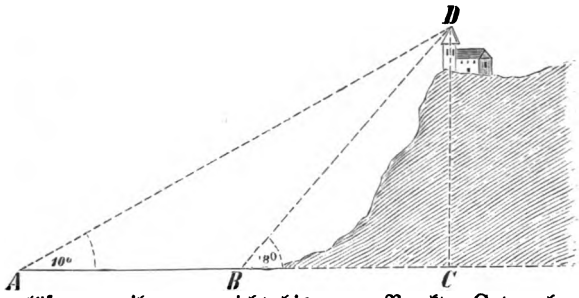


Digitized by Google

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke abe und efg folgt, daß sich ae:ef = ba: (gf oder) x verhält.

Lösung c: Wie man sich auch des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks bedienen kann, siehe § 32, II 3.

Fig. 129.



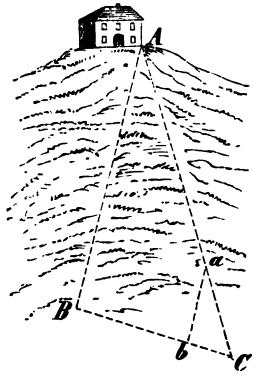
3. Die Höhe eines Berges zu messen resp. zu berechnen (Fig. 129).

Diese Aufgabe läßt sich nicht mit den soeben angegebenen Hilfsmitteln lösen, weil man nicht bis zum Punkte C der horizontalen Ebene messen kann, der senkrecht unter dem Gipfelpunkte D des Berges liegt. Um die Aufgabe zu lösen, messe man eine Linie AB (Basis), welche in der horizontalen Ebene liegt, auf der sich der Berg erhebt, und welche mit D in einer senkrechten Ebene liegt, so also, daß die Verlängerung von AB durch Punkt C geht; auch messe man die Winkel, welche die Visierlinien AD und BD mit der Horizontalen AC machen. Nun kann man das △ ABC mit Hilfe der meßbaren Seite AB und deren anliegenden Winkeln nach dem verjüngten Maßstabe auf Papier zeichnen. Dann fällt man von D ein Lot auf die Verlängerung von AB, mißt dasselbe auf dem Maßstabe und erhält so die Höhe des Berges.

II. Feldmessen: Schon bei den Aufgaben in § 31, in welchen unzugängliche Linien durch Zeichnung kongruenter Dreiecke gemessen werden sollten, wurde darauf hingewiesen, daß es bequemer sei, die betreffenden Dreiecke auf Papier im verjüngten Maßstabe zu zeichnen und dort die betr. Linien zu messen. Dies ist eigentlich schon eine Anwendung ähnlicher Dreiecke.

Hier noch zwei Beispiele:

Fig. 130.

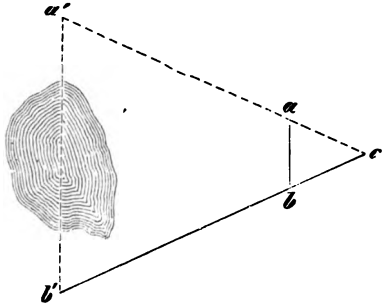


1. Die Entfernung eines unzugänglichen Punktes A von einem Punkte B zu bestimmen (Fig. 130): Mit Hilfe des Winkelkreuzes errichte auf AB in B einen rechten Winkel und miß auf einem Schenkel desselben zwei beliebige Längen Bb, bC ab (indem man die Punkte C und b mit Meßstangen bezeichnet). Auf BC errichte man eine Senkrechte in b und lege den Endpunkt a dieses Lotes so, daß er mit C und A in einerlei Richtung ist, und messe dann noch die Linie ab. Da das abgeschnittene △ abC ∽ ABC ist (nenne die gleichen Winkel!), so verhält sich Cb:CB = ba:BA;

Digitized by Google

aus den drei ersten meßbaren Linien kann nun die vierte berechnet werden.

Fig. 131.



2. Die Entfernung zweier Punkte, zwischen denen sich ein Gewässer ausbreitet, zu bestimmen: Fig. 131 zeigt, wie man die ähnlichen Dreiecke a'b'c und abc herstellt. Aus diesen ergiebt sich die Proportion: cb:cb' = ab:a'b', woraus die Berechnung von a'b' aus den drei ersten, meßbaren Linien hervorgeht.

Aufgaben.

1. In § 59 I 1 sei der Stab 3, der Schatten des Stabes 4 m und der des Baumes 22 m. Wie hoch ist der Baum?
2. In § 59 I 2 sei die Stange ae 1,20 m, die andere bf 2,80 m hoch, die Entfernung beider, ef, = 2,20 m, die Entfernung ei 24 m. Wie hoch ist der Turm?
3. In § 59 I 3 sei AB = 1000 m, ∠ A = 10°, ∠ DBC = 18°. Zeichne mit dem verjüngten Maßstabe die Figur und miß dann die Höhe CD!
4. In § 59 I 4 sei Cb = 20 m, ba = 40 m und CB = 75 m. Wie groß ist AB?
5. Versuche einige Höhenmessungen selbst auszuführen!]

Vierter Abschnitt.

Von den krummlinigen Figuren.

Kapitel 9.

Der Kreis.

§ 60. Allgemeine Erklärungen über den Kreis.

Zunächst sind die §§ 14 u. 15 zu wiederholen: Die Entstehung und das Wesen der Kreislinie, einzelne Linien im und am Kreise, (Peripherie, Halb- und Durchmesser, Sehne, Tangente), Lage zweier Kreise zu einander, das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durch- und

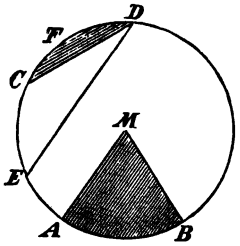
Digitized by Google

Halbmesser, Berechnung des einen aus dem anderen, Einteilung des Kreises in Grade.

Da es sich hier nicht nur um die Kreislinie, sondern um die ganze Kreisfläche handelt, so müssen noch einige Erklärungen über Winkel im Kreise und Teile der Kreisfläche hinzugefügt werden.

I. Winkel: Was für ein Punkt im Kreise ist der Scheitel des Winkels AMB? (Fig. 132.) Darum nennt man ihn Centriwinkel. Ein Centriwinkel ist also ein Winkel im Kreise, dessen Scheitelpunkt der Kreismittelpunkt ist. (Was für Linien sind daher seine Schenkel?) — Wo liegt der Scheitelpunkt des Winkels CDE? Was für Linien sind die beiden Schenkel? Ein Peripheriewinkel ist ein solcher Winkel, dessen Scheitelpunkt in der Peripherie liegt und dessen Schenkel Sehnen sind.

Fig. 132.



II. Teile der Kreisfläche: Oft schneidet man von einem Kreise ein Stück heraus, wie an diesem kreisförmigen Stück Papier, z. B. bei Torten ꝛc. Nenne die 3 Begrenzungslinien der Fläche AMB! (Fig. 132.) Was für Linien sind AM und BM? die krumme Linie AB?

Ein Kreisausschnitt (Sektor) ist ein Teil der Kreisfläche, welcher von 2 Halbmessern und dem dazwischen liegenden Kreisbogen begrenzt wird. — Je größer der Bogen oder der Centriwinkel des Kreisausschnittes wird, desto größer auch die Fläche desselben. Welcher Teil ist er von der Kreisfläche, wenn der Bogen und Centriwinkel desselben 90° beträgt? Man nennt ihn dann Viertelkreis (Quadrant). Bei 60°? Dieser Kreisausschnitt heißt Sextant. Zu welchem Teile des Kreises wächst der Kreisausschnitt heran, wenn der Centriwinkel ein gestreckter geworden ist? — Zuweilen muß man von Körpern mit kreisförmigen Flächen ein Stück abschneiden, um die Rundung zu beseitigen, z. B. bei Baumstämmen, die zu rechtwinkligen Balken behauen werden sollen. Nenne die beiden Begrenzungslinien der Fläche CDF! Was für Linien im Kreise sind die Gerade CD und die krumme Linie CFD? Ein Kreisabschnitt (Segment) ist ein Teil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne und dem dazu gehörigen Kreisbogen begrenzt wird. — Wie wird der Kreisabschnitt, wenn der Bogen größer wird? Welchen Teil des Kreises schneidet jeder Durchmesser ab? — Die Ringe eines Kochherdes oder der Weg um ein kreisförmiges Beet herum zeigen eine Fläche, welche von zwei konzentrischen Kreislinien begrenzt wird. Man nennt sie Kreisring. Was ist also ein Kreisring?

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was sind Centri- und Peripheriewinkel? Zeichne einige von verschiedener Größe!
2. Was ist ein Kreisausschnitt, Kreisabschnitt, Kreisring? Nenne Gegenstände, an denen diese Flächen vorkommen!
3. Zeichne einen Kreisausschnitt mit einem Centriwinkel von 70°, einen Kreis-

Digitized by Google

abschnitt, dessen Sehne so groß wie der Radius ist, und einen Kreisring, dessen äußerer Kreis einen 4 mal so großen Halbmesser hat als der innere!

4. Schneide einen Kreis aus und teile ihn in Viertelkreise! (Brich zuerst in einem Durchmesser zusammen ꝛc.)

§ 61. Lage des Kreismittelpunktes zu den Sehnen.

I. Lage des Mittelpunktes zur Mitte jeder Sehne (Fig. 133): Was für ein Dreieck bilden die beiden Halbmesser mit der Sehne AB? Wie liegt nun im gleichschenkligen Dreieck die Spitze zur Basis? (§ 33). Dieser Satz, auf den Kreis übertragen, lautet daher: Der Mittelpunkt eines Kreises liegt senkrecht über der Mitte jeder Sehne. Daraus lassen sich wieder wie beim gleichschenkligen Dreieck mehrere Umkehrungssätze bilden. — Auf Grund dieses Gesetzes lassen sich mehrere Aufgaben lösen:

Fig. 133.

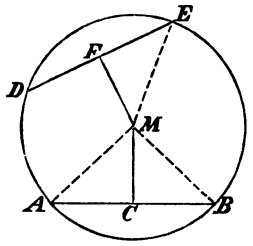


Fig. 134.

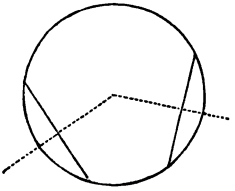


Fig. 135.

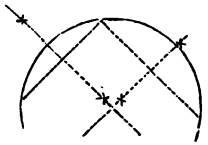
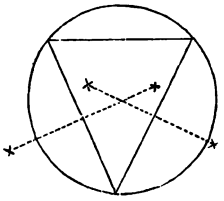


Fig. 136.



1. Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, wenn er z. B. bei einem kreisförmigen Beete oder beim kreisförmigen Boden eines Fasses gesucht werden soll: Wir ziehen zwei Sehnen (Fig. 134), der Mittelpunkt liegt senkrecht über den Mitten beider; also müssen wir in diesen Mitten Senkrechte errichten; ihr Schnittpunkt ist der Mittelpunkt. — Versuche dasselbe Verfahren bei zwei parallelen Sehnen! Wie dürfen also die Sehnen nicht sein?

2. Den Mittelpunkt eines Kreisbogens zu finden und dann den Kreis zu ergänzen (Fig. 135): Verfahre ebenso wie bei Aufgabe 1, ziehe dann einen Halbmesser und beschreibe mit demselben den Kreis vollständig.

3. Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geht, oder: Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben (Fig. 136): Was für Linien im Kreise müssen die drei Dreiecksseiten werden? Wir finden daher auch hier den Kreismittelpunkt, indem wir in den Mitten zweier Seiten Senkrechte errichten. Den gefundenen Mittelpunkt verbinden wir sodann mit einem Eckpunkt und beschreiben mit dieser Verbindungslinie einen Kreis. — Errichte in allen drei Seiten Mittelsenkrechte! Du findest, daß sie sich in einem Punkte schneiden. Es war daher bei unserer Aufgabe gleichgültig, welche zwei Seiten wir als Sehnen benutzten.

II. Entfernung gleicher Sehnen vom Mittelpunkt: a) Veranschaulichung: Man zeichnet zwei gleiche Sehnen in einen

Digitized by Google

Kreis, AB und DE (Fig. 133), zieht die senkrechten Entfernungen vom Mittelpunkte, CM und FM, und läßt deren Gleichheit durch Messen erkennen.

Gesetz: Gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkte gleichweit entfernt.

b) Begründung: Vergleiche die Dreiecke BCM und EFM!
(BC = EF als Hälften gleicher Sehen,
BM = EM als Halbmesser,
∠ BCM = EFM als R.)
Sie sind kongruent nach dem 4. Kongruenzsatze, folglich die gleichliegenden Seiten FM und CM oder die Entfernungen der Sehnen gleich. — Ebenso könnte man auch den Umkehrungssatz entwickeln: Wenn Sehnen gleich weit vom Mittelpunkt des Kreises entfernt sind, so sind sie gleich.

III. Entfernung ungleicher Sehnen vom Mittelpunkt: Man zeichnet verschieden lange Sehnen ein. Der Augenschein lehrt sofort: Von ungleichen Sehnen liegt die größte dem Mittelpunkt am nächsten, und umgekehrt: Von mehreren Sehnen ist diejenige die größte, welche dem Mittelpunkte am nächsten liegt. (Die Beweisführung hierzu ist etwas umständlich.)

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was geschieht mit einer Sehne durch eine Senkrechte vom Kreismittelpunkte aus?
2. Durch welchen Punkt des Kreises muß eine Senkrechte gehen, die in der Mitte einer Sehne errichtet worden ist?
3. Beschreibe einen Kreis: a) um ein spitzwinkliges, b) um ein rechtwinkliges, c) um ein stumpfwinkliges Dreieck! (Du findest: der Mittelpunkt liegt beim spitzwinkligen innerhalb, beim stumpfwinkligen außerhalb des Dreiecks, beim rechtwinkligen in der Mitte der Hypotenuse.)
4. Was gilt von der Entfernung a) gleicher, b) ungleicher Sehnen vom Mittelpunkte?
5. Welche gerade Linie im Kreise ist größer als jede Sehne?

§ 62. Gesetze über Winkel im Kreise.

I. Beziehung der Centriwinkel zu ihren Sehnen: Da gleiche Sehnen, AB und DE in Fig. 133, mit den Halbmessern kongruente Dreiecke bilden, so müssen deren Centriwinkel AMB und DME auch gleich sein.

Gesetz: Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel und, da diese ja durch die Kreisbogen gemessen werden, auch gleiche Bogen.

II. Centriwinkel von 60°: Zeichnet man eine Sehne, die gleich dem Halbmesser ist, so bildet sie mit den beiden Halbmessern nach ihren Endpunkten ein gleichseitiges Dreieck, hat daher einen Centriwinkel von 60°.

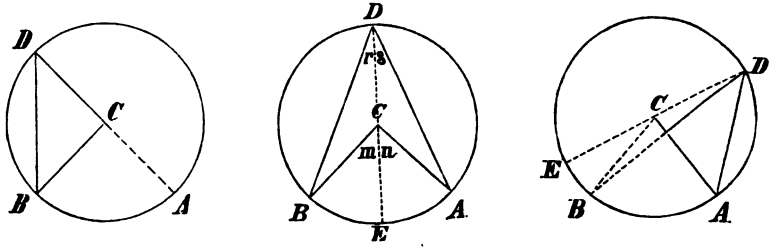
Gesetz: Ein Centriwinkel, dessen Sehne gleich dem Halbmesser ist, beträgt 60°.

Folgerung: Da 60° in 360° 6mal enthalten sind, so läßt sich der Halbmesser 6mal als Sehne auf der Peripherie abtragen und somit ein regelmäßiges Sechseck zeichnen.

Digitized by Google

III. Centri- und Peripheriewinkel auf gleichem Bogen:
a) Veranschaulichung: Zeige und nenne bei den drei Figuren 137,

Fig. 137. Fig. 138. Fig. 139.



138 und 139 den Bogen, welchen der Centriwinkel ACB umspannt; dann den Bogen, auf welchem der Peripheriewinkel D steht. Sie stehen also auf gleichem Bogen. In Fig. 137 liegt der Kreismittelpunkt in einem Schenkel des Peripheriewinkels, in Fig. 138 zwischen beiden Schenkeln und in Fig. 139 außerhalb des Peripheriewinkels. Miß in allen drei Fällen Centri- und Peripheriewinkel! Es gilt stets das Gesetz: Der Centriwinkel ist doppelt so groß als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf gleichem Bogen steht.

b) Begründung: Bei Fig. 137 ist der Beweis leicht zu erfragen. Was für ein Dreieck ist BCD? Was für einen Winkel an der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks bildet ∠ BCA? Was gilt aber von einem solchen, verglichen mit dem Basiswinkel D? (§ 32, I, c 2.) Also ist ∠ BCA = 2mal D.

[Bei Fig. 138 zerlegt der Durchmesser DE den Centri- und den Peripheriewinkel in je zwei Teile. Für diese ist der vorige Fall anzuwenden, ∠ m = 2r und ∠ n = 2s, folglich m + n = 2(r + s) oder ∠ BCA = 2BDA.]

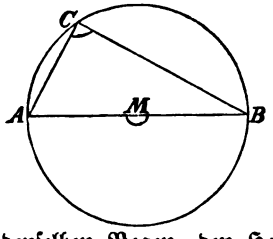
[Bei Fig. 139 ziehe man als Hilfslinie den Durchmesser DE; dann ist nach dem ersten Fall

∠ ECA = 2CDA
∠ ECB = 2CDB

folglich: ECA—ECB = 2(CDA—CDB)
oder: BCA = 2BDA.]

IV. Peripheriewinkel auf gleichem Bogen: Stehen mehrere Peripheriewinkel auf demselben Bogen, so ist jeder die Hälfte von einem und demselben Centriwinkel, daher alle gleich.

Fig. 140.



Gesetz: Peripheriewinkel auf gleichem Bogen sind einander gleich.

V. Peripheriewinkel im Halbkreise oder auf dem Durchmesser: Zeige den Bogen, den der Peripheriewinkel C umspannt! Zeichne den Centriwinkel, der denselben Bogen, den Halbkreis umspannt! Wie groß ist derselbe (als

Digitized by Google

gestreckter)? Welcher Teil ist aber der Peripheriewinkel von seinem Centriwinkel? Wie groß daher?

Gesetz: Der Peripheriewinkel im Halbkreise beträgt 1 R.

Folgerung: Will man über einer Linie einen rechten Winkel ausspannen oder sie zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks machen, so muß man sie als Durchmesser eines Kreises betrachten, oder über ihr einen Halbkreis errichten, indem man aus ihrer Mitte mit der Hälfte der Linie den Kreis schlägt.

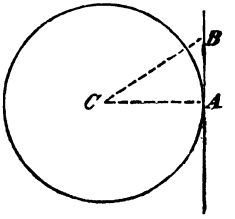
Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was gilt a) vom Centri- und Peripheriewinkel auf gleichem Bogen, b) von Peripheriewinkeln auf gleichem Bogen, c) vom Peripheriewinkel auf dem Durchmesser?
2. Wie groß ist ein Centriwinkel, dessen Sehne gleich dem Halbmesser ist?
3. Wie groß ist ein Peripheriewinkel: a) auf einem Quadranten, b) auf einem Sextanten, c) wenn er mit einem Centriwinkel des regelmäßigen Zehnecks auf gleichem Bogen steht?
4. Löse die Aufgabe 4 aus § 31, 4 jetzt so, daß du zuerst die Hypotenuse ziehst, darüber einen Halbkreis schlägst und die gegebene Kathete von einem Endpunkt der Hypotenuse aus auf der Peripherie abträgst!
5. Wiederhole die Aufgaben 2 und 5 von § 53!
6. Worauf beruht das Verfahren, nach welchem Zimmerleute prüfen, ob ihr Winkelmaß im rechten Winkel steht, indem sie es in einen Halbkreis (mit einem Durchmesser gleich der Hypotenuse) hineinpassen?

§ 63. Über Tangenten am Kreise.

I. Lage des Mittelpunktes zum Berührungspunkt der Tangente: a) Veranschaulichung: Man errichte im Endpunkte eines Halbmessers ein Lot auf demselben und verlängere es nach beiden Seiten (Fig. 141), so findet man, daß diese Linie den Kreis nur in einem Punkte berührt, also eine Tangente ist.

Fig. 141.



Daraus geht hervor:

Gesetz: Der Mittelpunkt des Kreises liegt senkrecht über dem Berührungspunkte der Tangente; oder: die Tangente steht senkrecht auf dem Halbmesser, den man nach dem Berührungspunkt gezogen hat.

b) Begründung: Jede andere Linie von C nach der Senkrechten AB außer CA, z. B. CB, ist als Hypotenuse größer als die Kathete oder der Radius AC, muß somit über die Peripherie hinausgehen; also liegt Punkt B, wie jeder andere Punkt — außer A — außerhalb des Kreises. Die Linie AB berührt demnach den Kreis nur in einem Punkte, ist also eine Tangente.

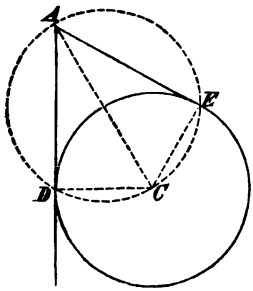
II. Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt in der Peripherie eines Kreises eine Tangente an denselben zu legen: Da die Tangente senkrecht auf dem Halbmesser stehen muß,

Digitized by Google

so brauchen wir nur (Fig. 141) den Punkt A mit dem Mittelpunkt zu verbinden und auf dem erhaltenen Halbmesser ein Lot zu errichten.

III. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente an denselben zu legen (Fig. 142): Da die Tangente auf dem Halbmesser senkrecht stehen muß, so gilt es, über AC einen rechten Winkel auszuspannen, und dies geschieht nach § 62 V durch einen Halbkreis über AC. Der Durchschnittspunkt D ist dann der Berührungspunkt. — Schlage ich den Halbkreis nach der andern Seite, so erhalte ich eine zweite Tangente AE.

Fig. 142.



IV. Zwei Tangenten von demselben Punkte aus: Vergleichen wir die beiden Tangenten bis zu ihrem Berührungspunkt (Fig. 142)! Dieselben bilden zwei kongruente Dreiecke ACD und AEC (denn AC = AC, CD = CE als Halbmesser, ∠ ADC = AEC als R), sind also gleich. Aus der Kongruenz derselben Dreiecke folgt auch die Gleichheit der Winkel CAD und EAD.

Gesetz: Zwei von einem Punkte an einen Kreis gezogene Tangenten — bis zum Berührungspunkt gerechnet — sind einander gleich. Der Winkel, den sie mit einander bilden, der Tangentenwinkel, wird durch eine Linie vom Scheitel nach dem Kreismittelpunkt halbiert.

V. Einen Kreis so in einen Winkel zu beschreiben, daß er die Schenkel desselben berührt (Fig. 143): Da die Schenkel Tangenten werden sollen, so muß der Mittelpunkt des Kreises in der Halbierungslinie dieses Winkels liegen. Man fälle von einem beliebigen Punkte derselben, C, ein Lot nach einem Schenkel und beschreibe damit, mit CA, einen Kreis. (Da unzählig viele Kreise in den Winkel gelegt werden können, so ist die Aufgabe unbestimmt; sie wird zu einer bestimmten, die nur einen Kreis zuläßt, wenn noch eine Bedingung hinzukommt, z. B. daß der Kreis durch einen gegebenen Punkt, der in einem Schenkel oder zwischen beiden Schenkeln liegt, hindurchgehen soll.)

Fig. 143.

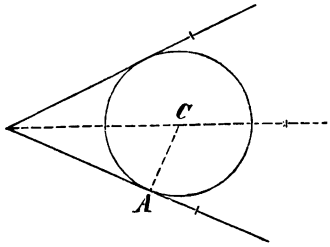
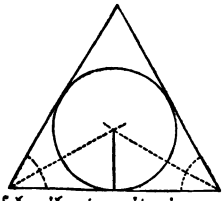


Fig. 144.



VI. In ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben (Fig. 144): Da die Seiten Tangenten am Kreise, die Winkel also Tangentenwinkel werden müssen, so muß der Mittelpunkt in den Halbierungslinien derselben liegen (s. IV.). Man halbiere daher zwei Winkel, fälle vom Schnittpunkt derselben ein Lot nach einer Seite und beschreibe damit einen Kreis.

Digitized by Google

Halbieren wir alle drei Winkel, so schneiden sich die drei Halbierungslinien in demselben Punkte. Es war daher bei unserer Aufgabe gleichgültig, welche zwei Winkel wir halbierten.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

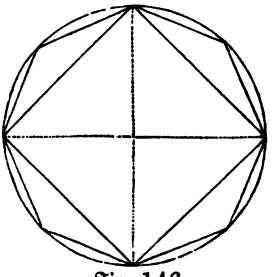
1. Wie liegt der Kreismittelpunkt zum Berührungspunkt einer Tangente? Durch welchen Punkt muß daher eine Senkrechte, im Berührungspunkte der Tangente errichtet, gehen?
2. Was gilt von Tangenten, welche von einem Punkte aus an denselben Kreis gezogen werden?
3. Durch welchen Punkt geht die Halbierungslinie eines Tangentenwinkels?
4. Zeichne in und um ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis! Was für Kreise werden es hier?
5. Zeichne zwischen zwei parallelen Linien einen Kreis, der beide berührt! (Was muß der senkrechte Abstand beider Parallelen im Kreise werden? Wo muß daher der Mittelpunkt liegen? ꝛc.)
6. Lege an einen Kreis von einem Punkte außerhalb desselben zwei Tangenten!

§ 64. Reguläre Polygone im Kreise.

Die in § 41 schon zum Teil erwähnten Konstruktionen regelmäßiger Vielecke lassen sich am bequemsten im Kreise ausführen. Man teilt die Peripherie oder die 360° um den Mittelpunkt mit Hilfe des Transporteurs in so viel gleiche Teile, als das Vieleck Seiten hat, und verbindet die Teilpunkte. — Nur bei einzelnen kann ohne Transporteur eine genaue Konstruktion ausgeführt werden:

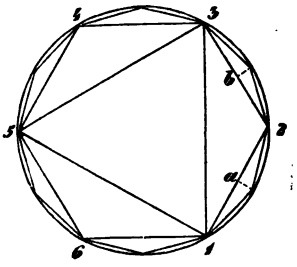
1. In einen Kreis ein regelmäßiges Vier-, Acht-, Sechzehneck ꝛc. einzuzeichnen (Fig. 145): Da beim regelmäßigen Viereck die Centriwinkel Rechte sein müssen, so zeichne man zwei senkrecht aufeinanderstehende Durchmesser und verbinde die Endpunkte. — Da das regelmäßige Achteck halb so große Centriwinkel hat, halbiere man die Centriwinkel oder Bogen des Quadrats. Durch fortgesetzte Halbierung erhält man das regelmäßige Sechzehn-, Zweiunddreißigeck ꝛc.

Fig. 145.



2. In einen Kreis ein regelmäßiges Sechs-, Drei-, Zwölf-, Vierundzwanzigeck ꝛc. zu zeichnen (Fig. 146): Da im regelmäßigen Sechseck der Centriwinkel 60° betragen muß, so zeichnet man gleichseitige Dreiecke, indem man den Radius sechsmal als Sehne abträgt (§ 62, II). Durch Auslassen je eines Teilpunktes erhält man ein gleichseitiges Dreieck im Kreise, durch Halbierung der

Fig. 146.



Digitized by Google

Centriwinkel ein regelmäßiges Zwölf-, Vierundzwanzigeck ꝛc. — Noch andere regelmäßige Vielecke, wie Zehn-, Fünf-, Zwanzigeck ꝛc., Fünfzehn-, Dreißigeck ꝛc. können geometrisch genau gezeichnet werden; doch beruht deren Konstruktion auf schwierigeren arithmetischen Entwicklungen oder auf der stetigen Teilung, muß darum hier übergangen werden. Zu diesen Vielecken wende man den Transporteur an. Ist der Kreis schon gegeben, so zeichnet man den Centriwinkel ein und erhält so eins von den Bestimmungsdreiecken. Ist dagegen die Seite gegeben, so trage man an beiden Endpunkten den halben Polygonwinkel an, so erhält man ebenfalls ein Bestimmungsdreieck, dessen Schenkel der Radius des Kreises wird, in welchen das Vieleck eingetragen werden muß.

3. Folgendes mechanische Verfahren führt auch zu ziemlich genauen Figuren: Man soll z. B. in einen Kreis ein regelmäßiges Siebeneck zeichnen (Fig. 147): Man teilt den Durchmesser ab in sieben gleiche Teile, errichtet über ihm ein gleichseitiges Dreieck abd, zieht von der Spitze d eine Linie durch den zweiten Teilpunkt bis zur Peripherie. Verbindet man den Endpunkt x mit dem Endpunkt des Durchmessers, a, so ist diese Linie ax annähernd die Seite des regelmäßigen Siebenecks, die man nun noch sechsmal auf der Peripherie abtragen kann. — Ähnlich gestaltet sich das Verfahren beim Fünf-, Neun-, Elf-, Dreizehneck ꝛc., wobei der Durchmesser in fünf, neun, elf, dreizehn gleiche Teile zu teilen und wiederum der zweite Teilpunkt zu verwenden ist. Das Zehn-, Vierzehn-, Achtzehn-, Zwanzigeck ꝛc. erhält man aus dem Fünf-, Sieben-, Neun-, Zehneck durch Halbierung des Centriwinkels.

Fig. 147.

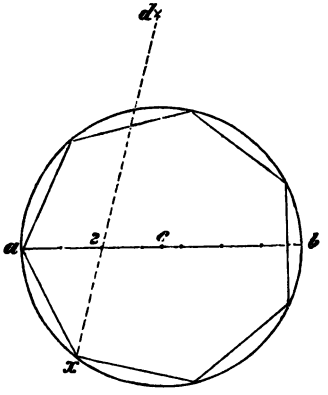
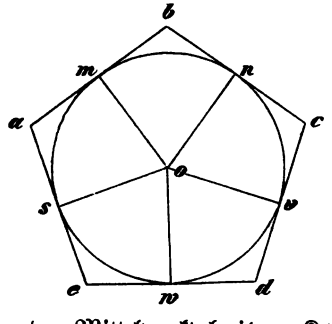


Fig. 148.



4. Um einen Kreis ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen (Fig. 148): Man zeichnet zunächst das entsprechende regelmäßige Vieleck in den Kreis und legt durch die Ecken desselben Tangenten an den Kreis, so schließen diese ein regelmäßiges Vieleck um den Kreis ein.

5. In und um ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben (Fig. 95). Man errichte in den Mitten zweier Seiten, ab und bc, Senkrechte, so ist der Schnittpunkt o der Mittelpunkt beider Kreise, das Lot no der Seitenstrahl oder der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, die Linie nach einem

Digitized by Google

Winkelpunkt der Winkelstrahl oder der Halbmesser des umschriebenen Kreises. — Statt die beiden Senkrechten zu errichten, kann man auch zwei Polygonwinkel halbieren.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

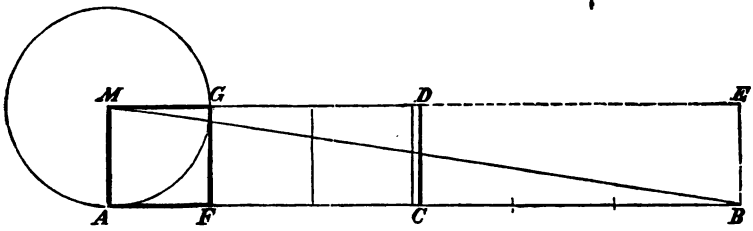
1. Wiederhole nach § 40 über Bestimmungsdreiecke, Centri- und Polygonwinkel der regelmäßigen Vielecke!
2. Zeichne in und um einen Kreis ohne Transporteur: a) ein regelmäßiges Sechs-, Drei- und Zwölfeck, b) ein regelmäßiges Vier- und Achteck!
3. Zeichne in einen Kreis mit Transporteur (unter Verwendung des Centriwinkels) ein regelmäßiges Siebeneck!
4. Zeichne in einen Kreis auf mechanische Weise, aber ohne Transporteur ein regelmäßiges Neuneck!
5. Zeichne um und in ein Quadrat einen Kreis!

§ 65. Flächenberechnung des Kreises.

In § 15 ist das Verhältnis zwischen Durchmesser und Peripherie erörtert worden, sowie die Berechnung der Peripherie aus Durchmesser und Halbmesser und umgekehrt wieder des Durchmessers und Halbmessers aus der Peripherie.

I. Berechnung der Fläche aus dem Radius: a) Wie wir bei Fig. 106 das regelmäßige Vieleck in Bestimmungsdreiecke zerlegen und diese nebeneinander als ein einziges Dreieck darstellen konnten, so können wir den Kreis in unendlich viele Dreiecke zerlegen, die alle einen Teil der Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe haben. Diese als Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe an einer geraden Linie nebeneinander gelegt, ergeben ein einziges Dreieck, ABM (Fig. 149),

Fig. 149.



welches die ganze Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat. Der Inhalt dieses Dreiecks und somit des Kreises würde also gleich Peripherie mal Radius dividiert durch 2 sein. Diese Regel läßt sich aber nicht ohne weiteres anwenden, da gewöhnlich nur der Halbmesser gegeben ist. Wenn wir das △ ABM zu seinem Rechteck ABEM ergänzen, so ist dieses doppelt so groß als der Kreis. Um ein Rechteck zu erhalten, das gleich dem Kreise ist, müssen wir die Grundlinie des Rechtecks halbieren, so ist ACDM = dem Kreise. Auf der halben Peripherie AC läßt sich der Radius $3\frac{1}{7}$ mal abtragen. Errichten wir in diesen Teilpunkten Lote, so zerfällt das Rechteck in drei

Digitized by Google

Radiusquadrate und noch einen Streifen, welcher $^1/_7$ von einem solchen Quadrate beträgt.

Regel: Die Kreisfläche ist das $3\frac{1}{7}$fache vom Radiusquadrat oder = Radius mal Radius mal $3\frac{1}{7}$ (3,14).

Für vorgeschrittene Schüler kann die Entwicklung auch mit Buchstaben kurz so geführt werden: Der Kreis läßt sich nach Figur 149 als ein △ ABM darstellen, dessen Inhalt ist $= \frac{P \cdot r}{2}$. Für P (die Peripherie) kann man nach § 15 $2\,r.\pi$ einsetzen; also ist $F = \frac{2\,r.\pi.\,r}{2}$, oder durch 2 gekürzt und für r. r den gleichbedeutenden Ausdruck r^2 gesetzt, $F = \underline{r^2\,\pi}$.

b) Ist der Durchmesser gegeben, so ist es ratsam, um nicht durch viele Regeln zu verwirren, erst den Halbmesser und dann wieder vorige Regel anwenden zu lassen.

c) Ist der Umfang eines Kreises zur Flächenberechnung gegeben, so muß man auch daraus zuerst den Halbmesser bestimmen $\left(r = \frac{P}{2\,\pi}\right)$ und kann dann wie oben verfahren; oder man kann die gegebene Peripherie mit dem berechneten Halbmesser multiplizieren und durch 2 dividieren.

II. Berechnung des Halbmessers aus der Kreisfläche: Da die Kreisfläche das $3\frac{1}{7}$- oder 3,14-fache vom Radiusquadrat ist, so finde ich das Einfache, indem ich die Kreisfläche durch 3,14 dividiere. Aus dem Radiusquadrat finde ich aber dann eine Seite oder den Radius selbst, wenn ich die Wurzel ziehe.

Regel: Man findet den Halbmesser aus der Kreisfläche, indem man dieselbe durch 3,14 dividiert und aus dem Ergebnis die Wurzel zieht.

$$\left(r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}\cdot\right)$$

Daß dann der Durchmesser und auch der Umfang wieder leicht zu bestimmen ist, ergiebt sich von selbst.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Beantworte zur Wiederholung die Fragen 1—3 von § 15!
2. Wie verhält sich die Kreisfläche zum Radiusquadrat?
3. Wie finde ich die Kreisfläche aus dem Halbmesser (Durchmesser, Umfange)?
4. Wie finde ich den Halbmesser aus der Kreisfläche?
5. Stelle den Kreis als ein Dreieck dar (Grundlinie = der Peripherie oder $6\frac{3}{7}$ Halbmesser, Höhe = Halbmesser), verwandle das Dreieck in ein Rechteck und zerlege dieses in Radiusquadrate! (Fig. 149.)
6. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 23—25 (Auswahl!).

§ 66. Verhältnis zweier Kreise zu einander.

I. Verhältnis der Peripherien: Berechne die Peripherie eines Kreises von 10 cm, dann von 20 cm Halbmesser und vergleiche

Digitized by Google

die Ergebnisse! Diese verhalten sich wie 1:2; die Halbmesser verhielten sich auch = 1:2.

Gesetz: Also verhalten sich die Umfänge zweier Kreise ebenso wie die Halbmesser.

[Entwicklung mit Buchstaben: Nennen wir die verschiedenen Radien R und r, so sind die Peripherien $2R\pi$ und $2r\pi$, verhalten sich also wie $2R\pi : 2r\pi$, oder durch 2π gekürzt, = R:r.]

II. Flächenverhältnis: Berechne den Flächeninhalt eines Kreises von 10 cm, dann von 20 cm Halbmesser und vergleiche die Ergebnisse! Der größere ist 4mal so groß. Die Halbmesser verhalten sich = 1:2, die Flächen = 1:4, d. i. = $1^2 : 2^2$.

Gesetz: Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser. — Dies geht auch daraus hervor, daß Kreise als ähnliche Figuren sich wie die Quadrate gleichliegender Linien verhalten müssen (§ 57).

[Oder Entwicklung mit Buchstaben: Die Fläche des größeren Kreises = $R^2 \cdot \pi$, des kleineren = $r^2 \cdot \pi$; also verhalten sich beide wie $R^2 \cdot \pi : r^2 \pi$, oder durch π gekürzt, = $R^2 : r^2$.]*)

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie verhalten sich von zwei Kreisen: a) die Umfänge, b) die Flächen, wenn der Halbmesser des einen 3-, $1/5$-, $2/7$-, $2\frac{1}{3}$ mal so groß ist, als der des anderen?
2. Von zwei runden Tischen hat der größere einen $1\frac{1}{2}$ mal so großen Halbmesser als der kleinere. Beide sollen mit Tuch überzogen und am Rande mit Band eingefaßt werden. a) Wievielmal so viel Band, b) wievielmal so viel Tuch braucht man beim größeren Tisch?
3. Zeichne einen Kreis, der einen 4-, 9-, 16mal so großen Inhalt besitzt, als ein gegebener!
4. Zeichne einen Kreis, der nur $1/4$, $1/9$, $4/25$ eines gegebenen Kreises ist!
5. Zeichne einen Kreis, der 2-, 3-, $2/5$ mal so groß als eine gegebene Kreisfläche ist! (Da sich die Flächen wie die Quadrate der Radien verhalten, so zeichne zunächst ein Quadrat, welches 2-, 3- bzw. $2/5$ mal so groß als das Radiusquadrat des gegebenen Kreises ist, nach § 53, Aufg. 3, 4 u. 7, und beschreibe mit der erhaltenen Quadratseite einen Kreis!)]

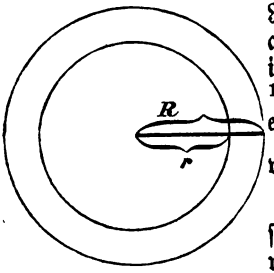
§ 67. Berechnung einzelner Teile der Kreisfläche.

I. Kreisring (Fig. 150): Die Fläche des Kreisringes erhalte ich, wenn ich vom Flächeninhalt des größeren Kreises den des kleineren abziehe. ($R^2\pi - r^2\pi$.)

*) [redacted] eine feine Wage zur Hand, so kann man auch zwei Kreisflächen au[redacted]ch starkem Papiere, von denen die eine einen doppelt so großen [redacted]ie andere hat, wiegen. Vierfaches Gewicht — vierfacher Flächen- [redacted] Alexander von Humboldt wählte diesen Weg, um das Verhältnis von [redacted] und Land auf der Erde zu ermitteln. Aus guten Karten wurden die Stücke, welche das Land enthielten, sorgfältig ausgeschnitten und gewogen. Das Verhältnis ihres Gewichts zum Gewicht der Kartenteile, welche das Meer darstellten, diente dazu, das Verhältnis von Land und Wasser auf der Erdoberfläche zu bestimmen.

Digitized by Google

Fig. 150.



II. Kreisausschnitt: a) Fläche aus Radius und Centriwinkel: Ein Kreisausschnitt mit einem Centriwinkel von 1° ist im ganzen Kreise 360 mal enthalten, ist also $^1/_{360}$ der ganzen Kreisfläche. Ein Ausschnitt mit einem Centriwinkel z. B. von 17° beträgt $^{17}/_{360}$, von n° $\frac{n}{360}$ der ganzen Kreisfläche.

Regel: Man berechnet einen Kreisausschnitt, indem man zuerst den ganzen Kreis berechnet, dessen Inhalt durch 360 dividiert und das Ergebnis mit der Anzahl der Grade seines Centriwinkels multipliziert (oder erst multipliziert und dann durch 360 dividiert; Formel: $F = \frac{r^2 . \pi . n}{360}$).

[Die durch Umkehrung dieser Regel zu erhaltenden Formeln für die Berechnung des Halbmessers oder des Centriwinkels aus dem Flächeninhalt, F, des Kreisausschnittes lauten:

$$r = \sqrt{\frac{360 . F}{\pi . n}} \quad \text{und} \quad n = \frac{360 . F}{r^2 . \pi}.$$

Die Entwicklung dieser, auch weniger wichtigen Formeln ist etwas zu schwierig.]

b. Fläche aus Bogen und Radius: Zuweilen ist statt des Centriwinkels oder der Grade des Bogens die Länge des Bogens bekannt (z. B. § 84, II). Dann kann man — entsprechend der Fig. 149 — den Kreisausschnitt als ein Dreieck auffassen, welches den Bogen zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat; daher der Inhalt: Bogen mal Radius, dividiert durch 2.

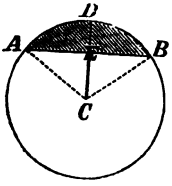
c) Bogen: Ein Kreisbogen von 1° ist $^1/_{360}$ der ganzen Peripherie, ein Kreisbogen von 17° = $^{17}/_{360}$, ein Kreisbogen von n° = $\frac{n}{360}$ der Peripherie.

Regel: Man findet die Länge eines Kreisbogens, indem man zuerst die ganze Peripherie berechnet, diese durch 360 dividiert und das Ergebnis mit der Anzahl der Grade multipliziert (oder fürs praktische Rechnen besser: erst multiplizieren, dann durch 360 dividieren. Formel:

$$\text{Bogen } b = \frac{2r . \pi . n}{360} = \frac{r . \pi . n}{180}).$$

(Die Umkehrungsformeln $r = \frac{180 . b}{\pi . n}$ und $n = \frac{180 . b}{r . \pi}$ sind zu übergehen.)

Fig. 151.



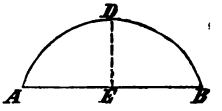
III. Kreisabschnitt: a) Genaue Berechnung (Fig. 151). Der Kreisabschnitt ADB bleibt übrig, wenn man vom Kreisausschnitt ADBC den Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks ABC abzieht. Ersterer ist $\frac{r^2 . \pi . n}{360}$. Zur Berechnung des Dreiecks müßte man Sehne AB als Grundlinie und den Ab-

Digitized by Google

stand vom Mittelpunkt, EC, als Höhe kennen. Letztere kann nach dem Lehrsatze des Pythagoras aus dem Halbmesser und der Sehne berechnet werden. (§ 55, II.) Aber auch die Sehne ist durch die Größe des Halbmessers und des Centriwinkels schon mitbestimmt. Jedoch die Berechnung daraus erfordert in den meisten Fällen trigonometrische Kenntnisse; in einzelnen Fällen genügt der Pythagoreische Lehrsatz. Da aber auch hier die Berechnung eine komplizierte ist, muß sie für unsere Zwecke übergangen werden. Nur die Berechnung eines Kreisabschnittes zu einem Bogen von 60° und von 90° kann allenfalls den Schülern zugemutet werden. Bei einem Centriwinkel von 60° ist die Sehne gleich dem Halbmesser und das gleichseitige Dreieck nach § 55, I zu berechnen. Beim Centriwinkel von 90° ist das Dreieck ein rechtwinkliges und als solches gleich dem halben Produkt seiner Katheten oder der Halbmesser.

b) Annähernde Berechnung (Fig. 152): Man multipliziere die Sehne AB mit $^2/_3$ der Bogenhöhe DE (des Lotes von der Mitte des Bogens auf die Sehne), so erhält man annähernd den Inhalt des Kreisabschnittes. (Die Multiplikation mit der halben Bogenhöhe würde nur den Inhalt des geradlinigen Dreiecks ABD ergeben.)

(Fig. 152.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie berechnet man den Inhalt a) eines Kreisringes, b) eines Kreisausschnittes α. aus Radius und Centriwinkel, β. aus Radius und Bogenlänge, c) annäherungsweise den Inhalt eines Kreisabschnittes?
2. Teile den Halbmesser eines Kreises in fünf gleiche Teile und beschreibe aus dem Mittelpunkte mit $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$ des Halbmessers konzentrische Kreise! Gieb an, welchen Teil die einzelnen Ringe, von innen nach außen gezählt, vom ganzen Kreise bilden! ($^1/_{25}$, $^3/_{25}$, $^5/_{25}$, $^7/_{25}$, $^9/_{25}$.)
3. Welcher Teil ist ein Bogen von der ganzen Peripherie und der Kreisausschnitt von der ganzen Kreisfläche bei einem Centriwinkel von 60, 90, 72, 120°?
4. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 25 und 26, 28 und 29. (Auswahl der leichteren Aufgaben.)

Kapitel 10.

Andere krummlinige Figuren außer dem Kreise.

§ 68. Die Ellipse nach ihren wichtigsten Eigenschaften.

I. Vorkommen: In der Natur an Blättern und Früchten; an verfertigten Gegenständen: an Möbeln (sogenannte ovale Tischplatten, Spiegel), an Blech- und Porzellangefäßen, Beeten ꝛc.

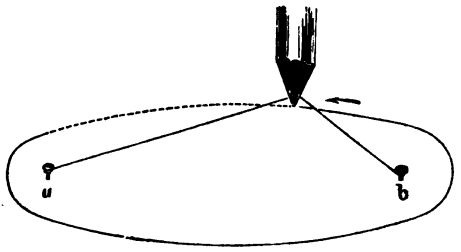
II. Herstellung als Kegelschnitt: Wenn ein Kegel (Zuckerhut, Rübe ꝛc.) parallel zur Grundfläche durchschnitten wird, so entsteht ein

Digitized by Google

Kreis; dagegen bei schrägem Schnitte eine Ellipse, die um so langgezogener wird, je mehr der Schnitt von der parallelen Richtung abweicht (Fig. 39, AC).

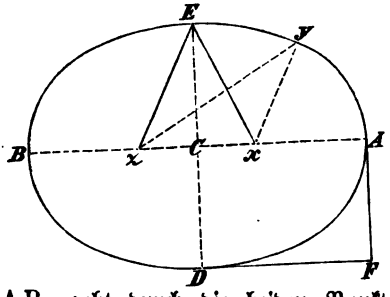
III. Herstellung mittelst einer Schnur (Fig. 153): Verfahren des Gärtners, Tünchers, Böttchers ꝛc. Gieb an, wie der Gärtner mit Hilfe einer Schnur ein kreisrundes Beet herstellt! Der Lehrer führt nun entweder im Schulhof auf dem Erdboden oder an der Wandtafel das Verfahren vor, wie der Gärtner eine Ellipse bildet, läßt die Schüler genau beobachten und den Vorgang beschreiben: Man steckt zwei Pfähle in die Erde, befestigt an dieselben eine Schnur, die länger als die Entfernung der beiden Pfähle ist, spannt durch einen dritten spitzen Pfahl (an der Tafel durch zugespitzte Kreide) die Schnur straff und fährt an derselben entlang, um beide Pfähle herum, so beschreibt die Spitze eine Ellipse. Bei größerer Entfernung der beiden Pfähle wird die Ellipse mehr länglich, bei geringer Entfernung mehr kreisähnlich.

Fig. 153.



IV. Eigenschaften der Ellipse, verglichen mit dem Kreise (Fig. 154): Beide Flächen werden von in sich selbst zurückkehrenden krummen Linien begrenzt. Zeige den Mittelpunkt der beiden Flächen! Vergleiche aber die Entfernungen des Mittelpunktes von verschiedenen Punkten des Umfanges! Diese sind hier ungleich, ebenso die Linien, die durch den Mittelpunkt C hindurchgehen, die Durchmesser. Zeige den größten! den kleinsten! Der größte Durchmesser, AB, geht durch die beiden Punkte z und x, in denen bei der Herstellung die Pflöcke befestigt waren; er heißt die große Achse (Längsachse); letzterer, DE, steht senkrecht zu derselben und heißt die kleine Achse (Querachse). Beide halbieren sich gegenseitig, und jeder andere Durchmesser wird in dem Mittelpunkte ebenfalls halbiert. — Durch Zerschneiden einer Ellipse überzeugt man sich, daß jeder Durchmesser die Ellipse wie auch den Kreis halbiert. —

Fig. 154.



V. Brennpunkte der Ellipse: Die beiden Einsatzpunkte z und x sind für die Ellipse von besonderer Wichtigkeit. Wenn in einem elliptischen, innen polierten Gefäß ein Licht in dem einen Punkte z sich befindet, so werden alle Strahlen von den Wänden nach dem

Digitized by Google

andern Einsatzpunkt x zurückgeworfen. Dadurch entsteht in diesem Punkte so große Wärme, daß leicht entzündliche Stoffe dort von selbst anbrennen. Man nennt darum diese Punkte die Brennpunkte der Ellipse. Wasserwellen, in einem Brennpunkte eines elliptischen Gefäßes erregt, bilden auch Wellen vom andern Brennpunkte aus. Schallwellen, von einem Brennpunkte ausgehend, werden nach dem andern zurückgeworfen (Ohr des Dionys). — Bei langgezogenen Ellipsen sind die Brennpunkte weiter vom Mittelpunkte entfernt, als bei solchen Ellipsen, die sich mehr dem Kreise nähern. Die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte, Cz oder Cx, heißt die Exzentrizität. —

VI. Leitstrahlen: Eine Linie von einem Punkte des Umfanges nach einem Brennpunkte wird Leitstrahl (Radius vector) genannt. Von jedem Punkte lassen sich zwei Leitstrahlen ziehen. Aus der oben beschriebenen Darstellung der Ellipse mittelst einer Schnur ist leicht Folgendes über die Leitstrahlen zu erkennen: Da die Länge der angespannten Schnur immer dieselbe bleibt und stets sich in zwei Leitstrahlen zerlegt, so ist:

1. für jeden Punkt des Umfanges die Summe der beiden Leitstrahlen dieselbe.

Wenn der Schreibstift auf dem Endpunkte B der großen Achse steht, so zerfällt die Schnur in die beiden Leitstrahlen Bz und Bx; legen wir das hierbei doppelt liegende Stück Bz einmal auf die gleiche Strecke Ax, so deckt die Schnur die ganze große Achse. Also ist

2) die Summe von je zwei Leitstrahlen gleich der großen Achse.

Wenn der Schreibstift auf dem Endpunkte der kleinen Achse, E, steht, so sind die beiden Teile der Schnur, die Leitstrahlen Ez und Ex gleich, also jeder gleich der halben großen Achse. Also:

3) ein Leitstrahl vom Endpunkt der kleinen Achse ist gleich der halben großen Achse.

Exzentrizität, halbe große Achse und halbe kleine Achse bilden daher ein rechtwinkliges △ ECz, in welchem nach dem Pythagoreischen Lehrsatze aus je zwei Stücken das dritte berechnet werden kann.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Welcher Kegelschnitt ergiebt eine Ellipse?
2. Erkläre bei der Ellipse die Ausdrücke: Mittelpunkt, große und kleine Achse, Brennpunkte, Exzentrizität, Leitstrahl!
3. Welche drei Gesetze gelten von den Leitstrahlen der Ellipse?
4. Wie groß ist die Exzentrizität bei der elliptischen Erdbahn, da sie $^1/_{60}$ von der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne beträgt? (Ez = der halben großen Achse BC = 20 000 000 Meilen.) Wie groß ist daher die Sonnennähe Bz (BC — Cz) und die Sonnenferne Az (CA + Cz)?

§ 69. Konstruktionsaufgaben über die Ellipse.

1. Mittelst einer Schnur, wenn die beiden Brennpunkte noch nicht gegeben sind: Gewöhnlich sind da, wo Ellipsen

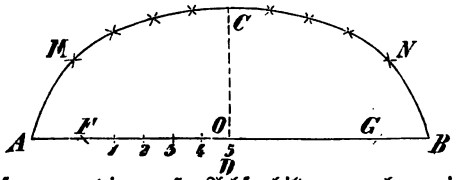
Digitized by Google

hergestellt werden sollen (bei Beeten ꝛc.), die beiden Achsen gegeben, da meist das Rechteck vorgeschrieben ist, in welches die Ellipse eingezeichnet werden soll. Man zeichnet daher das „Achsenkreuz", so daß beide Achsen senkrecht auf einander stehen und sich gegenseitig halbieren. Nun gilt es, die beiden Brennpunkte zu bestimmen. Da die Entfernung eines Brennpunktes vom Endpunkt der kleinen Achse gleich der halben großen Achse ist, so erhält man die Brennpunkte, indem man aus dem Endpunkte der kleinen Achse, aus E, mit der halben großen Achse einen Kreisbogen beschreibt, dann sind die Schnittpunkte z und x die gesuchten Brennpunkte. Hier befestigt man die Enden einer Schnur, welche die Länge der großen Achse haben muß, und verfährt nun auf die in § 68 angegebene Weise.

Aus je einer Achse und der Exzentrizität läßt sich auch auf Grund der Gesetze von den Leitstrahlen die Ellipse zeichnen; doch wird dieser Fall seltener in der Praxis auftreten.

[2. Konstruktion ohne Schnur: Hier möge noch kurz angegeben sein, wie man ohne Schnur, nur mit Zirkel und Lineal auf Papier eine Ellipse — allerdings etwas umständlich — zeichnen kann (Fig. 155).

Fig. 155.



Man stelle zunächst das Achsenkreuz her und bestimme nach obigem Verfahren die beiden Brennpunkte F und G, zerlege dann die große Achse in beliebig viel gleiche oder ungleiche Teile. Da je zwei Stücke, welche zusammen die große Achse bilden, auch zwei Leitstrahlen bilden können, so findet man einen Punkt des Umfanges, z. B. N, wenn man aus dem Brennpunkte G mit dem einen Stück A1 und aus dem andern Brennpunkte F mit dem andern Stück B1 Kreisbogen beschreibt. Punkt M findet man durch Vertauschung der beiden Zirkelöffnungen. Beschreibt man in beiden Fällen die Kreuzbogen nach unten, so erhält man noch zwei Punkte des Umfanges, die den Punkten M und N entsprechen. Ebenso kann man nun mit A2 und B2, A3 und B3 ꝛc. verfahren und erhält dann stets vier neue Punkte des Umfanges. Je mehr Punkte man bestimmt hat, desto leichter ist es dann, aus freier Hand die Ellipse durch diese Punkte zu ziehen.]

3. Konstruktion mittelst mehrerer Kreise: In § 16 ist schon das Verfahren angegeben, wie man länglich-runde Linien, fälschlich auch Ellipsen genannt, durch verschiedene Kreisbogen zusammensetzt. Soll die Figur langgezogener werden, so kann man statt der beiden Kreise in Fig. 38 auch drei solche Kreise verwenden.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie findet man, wenn das Achsenkreuz einer Ellipse gegeben ist, die beiden Brennpunkte?
2. Zeichne in ein Rechteck von 6 cm Länge und 4 cm Breite eine Ellipse so hinein, daß die vier Rechtecksseiten in den Mitten berührt werden!

Digitized by Google

§ 70. Berechnung der Ellipse.

I. Flächeninhalt: Die Kreisfläche ist das $3\frac{1}{7}$fache vom Radiusquadrat AFGM (Fig. 149). In demselben Verhältnis steht die Ellipsenfläche zu dem Rechteck DFAC (Fig. 154), welches aus den beiden halben Achsen gebildet wird, ist daher auch das $3\frac{1}{7}$fache von diesem.

Regel: Man berechnet den Flächeninhalt einer Ellipse, indem man das Produkt der beiden halben Achsen noch mit $3\frac{1}{7}$ oder 3,14 multipliziert. ($F = a.b.\pi$, wenn a die halbe große Achse und b die halbe kleine Achse bedeutet.) Die Begründung hierfür gehört der höheren Mathematik an.

[II. Umfang: Die Umfangsbestimmung einer Ellipse gehört der höhern Mathematik an; für gewerbliche Zwecke genügt folgende Formel, welche den Umfang annähernd angiebt und in welcher a und b ebenfalls die beiden Halbachsen bezeichnen.

$$U = 2\,\pi.\sqrt{\tfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2.)}$$

Beispiel: Wie groß ist der Umfang eines ellipsenförmigen Beetes von 18 m Länge und 6 m Breite?

Lösung: $a = 9$ m, $b = 3$ m; $a^2 = 81$, $b^2 = 9$; $a^2 + b^2 = 90$;

$$U = 2.3{,}_{14}.\sqrt{45} = 6{,}_{28}.6{,}_{708} = \underline{\underline{42{,}_{126}\ldots}}\ \text{m.}]$$

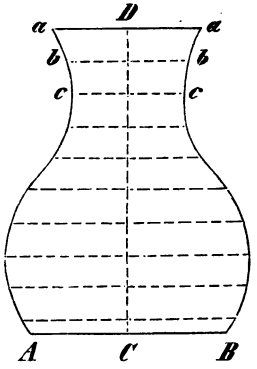
Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie berechnet man den Flächeninhalt einer Ellipse?
2. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 26 und 27.

[§ 71. Von der Ausmessung unregelmäßiger krumm- und gemischtliniger Figuren.

1. Es sei ein Beet von beistehender Gestalt (Fig. 156) auszumessen: Man fälle ein Lot CD auf die Grundlinie AB und ziehe parallel mit dieser so viel Linien, als nötig sind, um die Bogen ab, bc u. s. w. als gerade Linien ansehen zu können. Auf diese Weise ist die ganze Figur in Trapeze zerlegt, deren Inhalt man finden kann, wenn man die der Grundlinie parallelen Querlinien und das zwischen ihnen enthaltene Stück des Lotes CD gemessen hat. Die Summe aller Trapeze aber giebt den gesuchten Flächeninhalt der ganzen Figur.

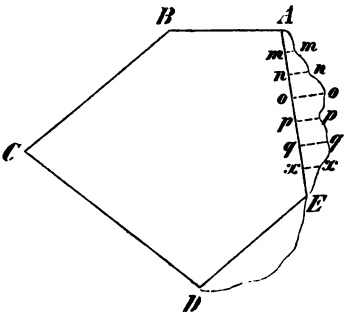
Fig. 156.



2. Es soll die ein Ackerstück vorstellende Fig. 157 gemessen werden. Dies kann auf folgende Art geschehen: Man steckt zuerst die Geraden AE und DE ab. Nun errichtet man Lote mm, nn ꝛc., durch welche die segmentähnliche Figur in zwei Dreiecke und übrigens in lauter Trapeze zerteilt wird. Ebenso verfährt man mit dem anderen Abschnitt ED. Das Weitere der Berechnung ist selbstverständlich.

Digitized by Google

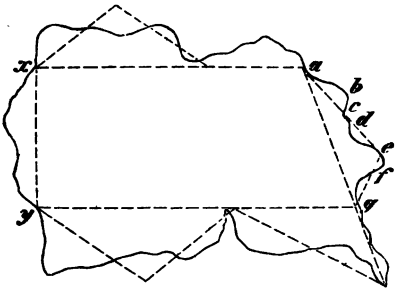
Fig. 157.



3. Anstatt dieses mühseligen und zeitraubenden Verfahrens wendet man zur Messung von Grundstücken auch folgende Methode an:

Man nimmt die auszumessende krummlinige Figur auf und verwandelt sie in eine geradlinige, indem man — nach dem bloßen Augenmaße — gerade Linien so durch die krumme Umfangslinie zieht, daß die abgeschnittenen Stücke der Figur den ihr zugefallenen möglichst gleich sind. Hierauf zerlegt man die Figur in Dreiecke oder Trapeze und verfährt auf die bekannte Weise.

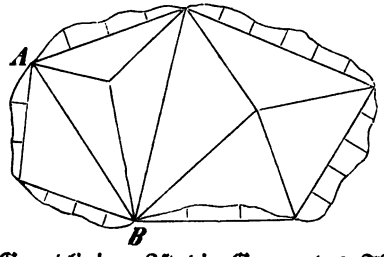
Fig. 158.



Das Wesen dieses Verfahrens wird durch Fig. 158 deutlicher werden. Die krummlinige Figur stellt die zu messende Fläche dar. Man mißt zuerst das Trapez xagy, dann noch die übrigen Abschnitte. Aber anstatt z. B. die krummen Linien abcdefg zu messen, steckt man eine gerade Linie von a nach g und eine andere von a nach e, endlich eine dritte von e nach g ab und mißt nun dieses dadurch entstandene Dreieck age aus, welches ziemlich denselben Flächeninhalt haben wird als jener unregelmäßig-begrenzte Abschnitt. Daß dieses Verfahren nicht genau ist, leuchtet ein, indes wird es von Laien, wenn es nicht auf mathematische Genauigkeit ankommt, oft angewendet und mag deshalb hier Erwähnung (ohne Empfehlung) finden.

4. Die Triangulierungsmethode wird von Geometern oft zur Ausmessung krummliniger Figuren angewandt, wenn die Fläche überall zugänglich ist. Man steckt nämlich durch Pfähle lauter Dreiecke ab, doch so, daß nicht zu spitze Winkel entstehen. Hat man alle Winkel gemessen, so braucht man nur noch eine Seite AB (Fig. 159) im verjüngten Maßstabe aufzutragen. Durch Winkelantragung konstruiert man hierauf alle übrigen Dreiecke. Ihren Inhalt berechnet man dann aus der Höhe und der Grundlinie. Ist die Grenze des Flächenstückes krummlinig, so läßt sich

Fig. 159.

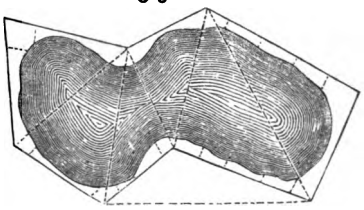


Digitized by Google

dieſe krumme Linie nur annäherungsweiſe auf den Riß bringen, nämlich dadurch, daß man ſich mittelſt der Kreuzſcheibe oder des Spiegeldiopters Lote (Ordinaten) abſteckt und dieſe verjüngt auf den Riß bringt. Bei der Inhaltsberechnung berechnet man die aus der Hauptfigur fallenden Flächenſtücke als Dreiecke oder Paralleltrapeze und zählt ſie noch zu oder bringt ſie, wenn ſie nach innen fallen, in Abzug.

5. Die Perimetermethode findet Anwendung, wenn die auszumeſſende Fläche im Innern nicht zugänglich iſt (Fig. 160). Man ſteckt um die Fläche ein Vieleck ab und mißt alle Seiten desſelben. Da die Winkel in dieſem Falle in der Regel ſehr ſtumpf werden, ſo hilft man ſich durch Meſſung der Winkel, welche die Diagonalen mit den Seiten bilden, und konſtruiert dann die Dreiecke aus zwei Seiten und einem Winkel, oder aus einer Seite und zwei Winkeln. Die krummen Grenzen verzeichnet oder vermißt man wieder mit Hilfe von Loten oder Ordinaten.]

Fig. 160.



Digitized by Google

II.

Die Lehre von den Körpern.
(Die Stereometrie.)

Fünfter Abschnitt.
Die geometrisch meßbaren Körper.

Kapitel 11.
Vorbegriffe für die Stereometrie.

§ 72. Wesen der Stereometrie.

Gleich bei der Einführung in die Geometrie sind die Kinder mit dem Wesen und der Entstehung der geometrischen Körper bekannt gemacht worden. Bei der darauf folgenden Betrachtung der Raumgrößen, in der Planimetrie, sind nun die Körper nicht etwa gänzlich beiseite geschoben worden; sondern entweder dienten sie als Anschauungsmittel für die Aufsuchung geometrischer Wahrheiten, oder in der Anwendung der besprochenen Gesetze und Regeln wurden wieder Körper benutzt. So wurde z. B. der Kreis an Gegenständen aufgesucht, dann näher betrachtet, und das von ihm Gelernte wurde wieder zur Lösung von solchen Aufgaben angewandt, die uns an wirklichen Gegenständen entgegentreten. Um die Schwierigkeiten nicht zu häufen, wurde zunächst von der dritten Dimension abgesehen, und es wurden nur die Raumgrößen näher betrachtet, die sich in einer Ebene darstellen lassen. Wir blieben gleichsam an der Oberfläche der Körper stehen und drangen nicht in dieselben ein. In der Stereometrie gilt es nun, auch die dritte Dimension mit in unsere Erörterungen zu ziehen, auch solche Raumgebilde (Linien, Winkel, Flächen) gleichzeitig zu betrachten, die nicht in derselben Ebene liegen, und die Körper nach ihrem Inhalte zu messen. — Da die hier zu betrachtenden Größen nicht in derselben Ebene zu liegen brauchen, so können sie auch meist nicht in einer Ebene, also durch Zeichnung klar dargestellt werden. In der Planimetrie genügte meist nach einmaligem Vorzeigen oder Aufsuchen der

Digitized by Google

betreffenden Raumgrößen an wirklichen Gegenständen die Veranschaulichung in einer Ebene, die Zeichnung. In der Stereometrie muß stets der ganze Körper als Veranschaulichungsmittel dienen, und die im Buche enthaltenen perspektivischen Zeichnungen dürfen nur nach vorangegangener körperlicher Auffassung Verwendung finden.*)

In einfacheren Schulverhältnissen wird man gleich mit der näheren Betrachtung und Berechnung der einzelnen Körper, mit § 74, beginnen und die noch unbekannten stereometrischen Begriffe da, wo sie nötig erscheinen, mit erläutern. — Bei reiferen Schülern und genügender Zeit können erst die im folgenden Paragraphen enthaltenen stereometrischen Vorbegriffe in anschaulicher Weise entwickelt werden.

§ 73. Von der Lage der Geraden und Ebenen im Raume.

I. Bestimmung einer Ebene:

a) Über eine Nadelspitze kann ein Blatt Papier in sehr verschiedener Richtung gehalten werden. Also durch einen Punkt lassen sich unendlich viele Ebenen legen.

b) Man bewegt einen in zwei Angeln befestigten Fensterflügel oder eine Thür; daran erkennt man: Auch durch zwei Punkte wird eine Ebene noch nicht bestimmt.

c) Man hakt einen geöffneten Fensterflügel fest; er kann jetzt, wo er in drei Punkten befestigt ist, nur die eine Lage annehmen. Oder man legt über drei Fingerspitzen ein Buch, so kann dies nur in einer Richtung liegen. Eine Ebene wird durch drei Punkte, die nicht in einer Linie liegen, völlig nach ihrer Lage bestimmt.

[Von der Größe ist hier abzusehen; wir denken uns vielmehr die Ebene nach allen Seiten hin bis ins Unendliche verlängert, so daß dadurch der ganze Weltenraum in zwei Teile zerfällt.]

Ein Schemel mit drei Füßen steht daher überall. — Statt der drei Punkte kann man auch eine Linie, welche zwei Punkte verbindet, und einen Punkt außerhalb derselben, oder auch zwei sich in einem Punkte schneidende Linien nehmen.

d) Die Lage der Thür wird auch fest bestimmt durch die beiden Pfosten, zwischen denen sie sich schließt: die Lage einer Ebene ist also auch durch zwei parallele Linien völlig bestimmt.

e) Halten wir vier Fingerspitzen nicht in gleicher Höhe, so läßt sich das Buch nicht über alle vier legen. Also durch vier Punkte läßt sich nicht immer eine Ebene legen. — Ein vierbeiniger Stuhl steht nicht sicher auf, wenn der eine Fuß kürzer ist. —

Zusammenfassung: Eine Ebene wird noch nicht durch einen oder zwei Punkte bestimmt, sondern 1) durch drei Punkte, die nicht in einer Linie liegen, 2) durch eine Linie und einen Punkt außerhalb derselben, 3) durch zwei sich schneidende Linien,

*) Dem vorliegenden Buche ist eine Tafel Körpernetze beigegeben zur Herstellung einzelner Körpermodelle. Man klebe die Netze auf Pappe, schneide sie in den äußeren Grenzlinien aus, während man sie in den innern (weißen) Linien nur ritzt, so daß sich die Flächen leicht zusammenlegen lassen.

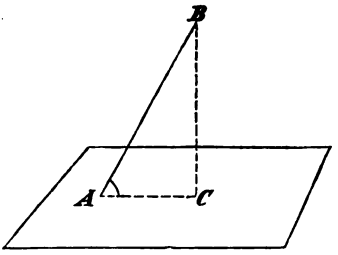
Digitized by Google

4) durch zwei parallele Linien. — Durch vier und mehr Punkte läßt sich nicht immer eine Ebene legen.

II. Lage zweier Geraden im Raume zu einander: In einer Ebene konnten zwei Linien dreifache Lage zu einander haben (vgl. § 9). Man halte zwei Stäbe übereinander, aber nicht parallel: Linien im Raume können auch viertens noch so laufen, daß sie weder parallel sind, noch sich schneiden; dann kann keine Ebene durch beide zugleich gelegt werden: man nennt sie windschiefe oder sich kreuzende Linien.

III. Lage der Geraden zu einer Ebene: Der Lehrer legt eine Stricknadel 1) auf ein Blatt Papier; 2) sticht er sie durch das Blatt; 3) hält er sie über das Blatt in gleicher Richtung mit demselben. Eine Linie kann 1) ganz in der Ebene liegen, 2) sie in einem Punkte schneiden, 3) gar keinen Punkt (auch bei gehöriger Verlängerung) mit der Ebene gemeinsam haben oder mit ihr parallel laufen. — Wenn eine Linie eine Ebene schneidet, so kann dies wieder so geschehen, daß sie mit allen Linien, die durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen werden können, rechte Winkel bildet, oder nur mit einer von diesen Linien, mit allen andern dagegen schiefe. Im ersten Falle steht die Linie senkrecht zur Ebene, im zweiten Falle schiefwinklig (Fig. 161). Den Neigungswinkel, den eine Linie AB mit einer Ebene bildet, mißt man, indem man von der Linie ein Lot, BC, auf die Ebene fällt, den Fußpunkt des Lotes mit dem Schnittpunkt der schrägen Linie verbindet; so ist der Winkel, den die Schräge AB mit dieser Verbindungslinie AC (ihrer Projektion) bildet, der kleinste von allen Winkeln der Schrägen zur Ebene und heißt der Neigungswinkel.

Fig. 141.



IV. Lage zweier Ebenen zu einander: Der Lehrer halte zwei Pappscheiben (oder dünne Brettchen) so über einander, daß sie 1) parallel laufen, 2) sich treffen. Die Schüler erkennen: zwei Ebenen können 1) parallel laufen — dann treffen sie sich nie und sind überall gleichweit entfernt —, 2) sich schneiden, und zwar geschieht dies stets in einer geraden Linie, die man Kante (Durchschnittskante) nennt. Den Winkel, den die beiden sich schneidenden Ebenen bilden, nennt man Flächenwinkel, Fig. 162 u. 163. (Statt des Scheitelpunktes eines Linienwinkels hier eine Kante, statt der Schenkel zwei Flächen). Den Flächenwinkel oder Neigungswinkel zweier Ebenen mißt man durch einen Linienwinkel, den man auf folgende Weise bildet: Man errichtet in einem beliebigen Punkte

Fig. 162.

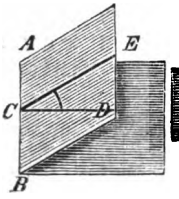
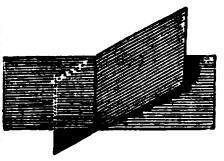


Fig. 163.

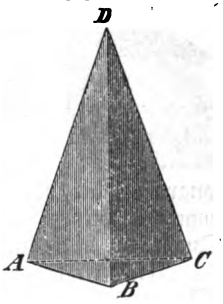


Digitized by Google

C der Durchschnittskante AB (Fig. 162) eine Senkrechte CD in der einen Ebene und eine Senkrechte CE, welche in der andern Ebene liegt; so schließen diese beiden den Neigungswinkel DCE ein. (Der Lehrer veranschauliche es an der geöffneten Schrankthür oder an der Einbanddecke eines Buches.) Derselbe kann ein rechter oder schiefer sein. Zwei Ebenen können sich also *rechtwinklig* und *schiefwinklig* schneiden.

V. *Körperliche Ecken*: Der Lehrer halte drei Stäbe so, daß sie alle mit dem einen Ende in einem Punkte D zusammenstoßen, aber nicht alle drei in dieselbe Ebene fallen (Fig. 164). Dann lege er durch je zwei derselben immer eine Ebene (etwa Pappdreiecke, △ ABD, BCD und dahinter ACD), so erhält man eine *dreiseitige körperliche Ecke*. Punkt D heißt der *Scheitel*, die drei Geraden DA, DB und DC heißen die *Kanten* und die von zwei aufeinanderfolgenden Kanten eingeschlossenen Ebenen die *Seiten oder Seitenflächen der Ecke*. — Zur Bildung einer Ecke sind mindestens drei in einem Punkt zusammenstoßende Gerade und daher auch drei Ebenen nötig. Es können aber auch vier, fünf und mehr Kanten und Ebenen in einer Ecke zusammenstoßen. (Zeigen an vier-, fünf- und mehrseitigen Pyramiden!) Danach unterscheidet man *drei-, vier- und mehrseitige körperliche Ecken*.

Fig. 164.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wodurch wird eine Ebene noch nicht, wodurch aber völlig bestimmt?
2. Welche vierfache Lage können zwei Gerade im Raum zu einander haben? Zeige im Zimmer zwei sich kreuzende Linien! Halte beide Arme so, daß sie zwei solche Linien veranschaulichen!
3. Welche dreifache Lage kann eine Linie zu einer Ebene haben?
4. Wie mißt man den Neigungswinkel einer Linie zu einer Ebene? Miß den Neigungswinkel, den eine schräge Stange des Tafelgestells mit dem Fußboden bildet!
5. Welche doppelte Lage können zwei Ebenen zu einander haben?
6. Wie mißt man einen Flächenwinkel oder den Neigungswinkel zweier Ebenen? Miß den Neigungswinkel zweier Wände!
7. Wie entsteht eine körperliche Ecke? Was versteht man unter dem Scheitel, den Kanten und den Seitenflächen einer Ecke? Suche einzelne Ecken im Zimmer auf und erläutere daran diese Ausdrücke!
8. Wie teilt man die Ecken nach der Zahl der Seitenflächen ein? Bestimme danach verschiedene Ecken im Zimmer!

Digitized by Google

Kapitel 12.

Körper mit durchgehends gleicher Dicke (prismatische Körper).

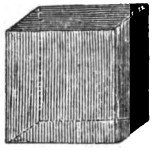
§ 74. Beschreibung des Würfels.

Vorbemerk.: Die Kinder können das Meiste vom vorgezeigten Würfel selbst ablesen.

I. Vorkommen: In der Natur verschiedene Mineralien, z. B.: Steinsalz, Flußspat, Bleiglanz. Verfertigte Gegenstände: Spielwürfel, Steine des Baukastens, Kästchen ꝛc.

II. Begrenzungsflächen: Wie viel Flächen begrenzen ihn? Was für Figuren sind es? Wie verhalten sich dieselben bezüglich ihrer Größe? Wie laufen je zwei gegenüberliegende? Wie stehen je zwei in einer Kante zusammenstoßende Quadrate auf einander? Die untere und obere Fläche werden als Grund- und Deckfläche oder als untere und obere Grundfläche, die vier andern als Seitenflächen bezeichnet. Da alle sechs Flächen kongruent sind, so ist es hier gleichgültig, welche als Grundfläche angenommen wird. Ein Würfel ist also ein Körper, der von sechs gleichen Quadraten begrenzt wird.

Fig. 165.



III. Kanten: Was bilden je zwei Quadrate am Durchschnitt? Wieviel Kanten liegen an der unteren Grundfläche? an der oberen? Wieviel Kanten gehen von unten nach oben? Danach spricht man von unteren und oberen Grundkanten und von Seitenkanten. Wieviel Kanten im ganzen? Wie sind alle Kanten unter einander? Zeige am Würfel parallele, sich schneidende und sich kreuzende Kanten! (Eine Grund- und eine Seitenkante, welche nicht zusammenstoßen.) Was für Winkel bilden je zwei zusammenstoßende Kanten?

IV. Ecken: Wieviel Kanten und wieviel Flächen stoßen in jeder Ecke zusammen? Es sind also lauter dreiseitige Ecken. Wieviel Ecken liegen an der unteren Grundfläche? an der oberen? im ganzen? Wieviel Grad betragen die drei Kantenwinkel jeder Ecke zusammen? ($3 \cdot 90 = 270°$.)

V. Achsen: Legt man durch den Mittelpunkt des Würfels eine Linie, welche zwei gegenüberliegende Ecken, die Mitten zweier gegenüberliegenden Flächen oder zweier gegenüberliegenden Kanten verbindet, so erhält man eine Ecken-, Flächen-, bzw. Kantenachse. (Erstere heißt auch die körperliche Diagonale und ist zugleich der Durchmesser der um den Würfel gelegten Kugel; die Flächenachse ist zugleich der Durchmesser einer in den Würfel gelegten Kugel und gleich einer Kante.) Wieviel Eckenachsen hat der Würfel? (Von den sechs Ecken werden je zwei durch eine Achse verbunden; also sind drei Eckenachsen möglich.) Wieviel Flächenachsen? (6 Flächen!) Wieviel Kantenachsen? (12 Kanten!)

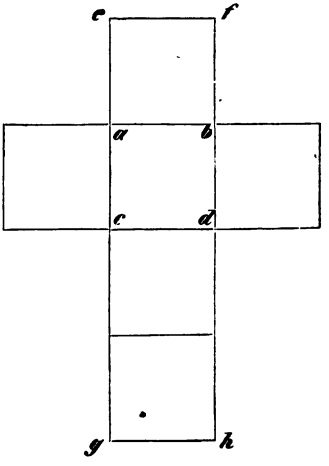
VI. Netz: Die Gesamtheit der sechs Begrenzungsflächen nennt man die Oberfläche des Würfels. Breitet man dieselbe in einer Ebene aus, so erhält man das Netz des Würfels, das gewöhnlich in der Kreuzform von Fig. 166 dargestellt wird. Das Netz, zusammengeklappt, schließt wieder den Würfelraum ein.

Digitized by Google

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Beschreibe den Würfel nach seinen Flächen, Kanten, Ecken und Achsen!
2. a) Wieviel Draht braucht man zu einem Drahtmodell des Würfels bei 15 cm Kantenlänge?
   b) Wie lang kann man die Kante eines solchen Würfels machen, wenn 1,50 m Draht zur Verfügung steht?
3. a) Wieviel qcm Pappe braucht man zur Herstellung eines Würfels von 8 cm Kantenlänge?
   b) Wieviel cm Kantenlänge muß ein Würfel haben, der mit 1350 qcm Blech beschlagen werden kann?
4. Wie lang ist bei einem Würfel von 10 cm Kantenlänge
   a) die Flächenachse? (= der Kante!)
   b) die Kantenachse? (= der Diagonale einer quadratförmigen Begrenzungsfläche!)

Fig. 166.



[c) die Eckenachse? (= der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die eine Kathete gleich einer Kante, die andere Kathete gleich einer quadratischen Diagonale ist!)]

5. Zeichne das Netz eines Würfels auf starkes Papier und fertige einen Würfel daraus! Schneide dabei das Netz in den äußeren Grenzlinien aus; ritze die inneren Linien mit einem Messer nur ein, so daß sich das Papier in diesen Linien leicht nach innen zusammenlegen läßt.

§ 75. Die Körper- oder Kubikmaße.

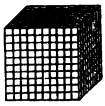
I. Eigentliche Kubikmaße: Körper können nur durch Körper gemessen werden. Wir müssen bei der Ausmessung der Körper zusehen, wie oft ein gewisser Körper — das Grundmaß — in dem zu messenden Körper Raum hat. Dazu eignet sich der Würfel oder Kubus am besten. Das Grundmaß ist daher ein Würfel von 1 m Kantenlänge und heißt Cubikmeter; Abkürzung cbm. (Das b nötig, zur Unterscheidung von dem Centimeter.) Wie heißt ein Würfel von 1 cm Kantenlänge? (ccm.) Von 1 mm? (cmm.) —

Zur anschaulichen Entwickelung der Währungszahlen eignet sich am besten das zwar amtlich nicht eingeführte Kubikdecimeter, da es am handlichsten und zugleich erkennbar genug ist. Als Zwischenstufe ist es bei der Einführung nicht gut zu entbehren; nach der Entwicklung der Verhältniszahlen wird es aber nicht mehr, etwa zu Rechenaufgaben, verwertet. Es hat auch noch aus dem Grunde besondere Berechtigung bei der Einführung der Körpermaße, weil es dem Liter entspricht und somit die unten zu besprechende Beziehung der Hohlmaße und Gewichte zu den Körpermaßen verdeutlicht. Man stelle sich ein Kubikdecimeter

Digitized by Google

aus Pappe und einige Kubikcentimeter her, teile die Grundfläche des ersteren in 100 qcm und ziehe zu den vier Grundkanten Parallelen um den Würfel herum in Abständen von je 1 cm. Dann erkennt der Schüler: Der Würfel wird in 10 Schichten oder Tafeln von 1 cm Dicke zerlegt; in der untersten, wie in jeder folgenden haben je 100 ccm Raum, da ja die quadratische Grundfläche 100 qcm enthält und somit 100 ccm neben einander stehen können. Alle 10 Schichten enthalten daher $10 \times 100 = 1000$ ccm; also hat 1 cdm 1000 ccm. Aus demselben Grunde hat 1 ccm wieder 1000 cmm (Fig. 167). 1 cbm hat ebenfalls 1000 cdm. Man zeige auch den Raum eines Kubikmeters.

Fig. 167.



Übersichtliche Zusammenstellung:

1 cbm = 1000 cdm,
1 cdm = 1000 ccm,
1 ccm = 1000 cmm.

1 cbm = [1000 cdm =] 1000000 ccm = 1000000000 cmm.

Daraus folgt:

[1 cdm = $^1/_{1000}$ cbm = 0,001 cbm],
1 ccm = $^1/_{1000000}$ cbm = 0,000001 cbm,
1 ccm = $^1/_{1000000000}$ cbm = 0,000000001 cbm.

Die Kubikdecimeter stehen also in der dritten, die ccm in der sechsten, die cmm in der neunten Decimalstelle neben den Kubikmetern.

II. Hohlmaße: In engster Beziehung zu diesen massiven Körpermaßen stehen die Hohlmaße, die zum Messen von Flüssigkeiten oder leicht verschiebbaren festen Körpern (Getreide, Mehl, Sand ꝛc.) dienen. — Wenn möglich, schütte man 1 l Wasser in einen Blechwürfel, der 1 Kubikdecimeter darstellt. Der Raum eines Kubikdecimeters heißt als rundes Hohlmaß 1 Liter; Abkürzung l.

100 l bilden 1 Hektoliter, hl.

Übersicht: 1 cbm = 10 hl,
0,1 cbm = 1 hl = 100 l,
1 l = 1000 ccm.

III. Gewichte: Wenn möglich, wiege man vor den Augen der Schüler 1 l Wasser ab.

1 Kubikdecimeter oder 1 l destilliertes Wasser von + 4° C wiegt 1 Kilogramm, kg; daher wiegt 1 ccm Wasser $^1/_{1000}$ kg = 1 Gramm, g; 1 cmm Wasser wieder $^1/_{1000}$ g = 1 Milligramm, mg, und 1 cbm Wasser 1000 kg = 1 Tonne, t (= 20 Centner, à 100 Pfund).

Übersicht:

1 t ist das Gewicht von 1 cbm Wasser und hat 1000 kg,
1 kg " " " " 1 l " " " 1000 g,
1 g " " " " 1 ccm " " " 1000 mg,
1 mg " " " " 1 cmm "

1 t = 1000 kg = 1000000 g [= 1000000000 mg].

Digitized by Google

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was für Würfel sind cbm, ccm, cmm?
2. Gieb die Währungszahlen der Körpermaße und zur Wiederholung auch die der Längen- und Flächenmaße an!
3. Nenne die Hohlmaße und gieb ihre Beziehung zu den Kubikmaßen an!
4. Nenne die Gewichte und gieb ihre Beziehung zu den Kubik- und Hohlmaßen an!
5. Schreibe 5 cbm 2485 ccm in decimaler Form als cbm; resolviere sodann in ccm!
6. Wieviel wiegt a) 1 hl Öl bei einem specifischen Gewicht von $^4/_5$ ($^4/_5$ von dem Gewichte eines hl Wasser); b) 1 l Quecksilber bei einem specifischen Gewicht von 13,6?

§ 76. Berechnung des Würfels.

Will man nun mit dem oben besprochenen Körpermaße den Inhalt eines Körpers, z. B. einer Stube, messen, so müßte man zusehen, wie oft 1 cbm in den Stubenraum neben einander gestellt werden kann. Ein solches direktes Messen würde äußerst beschwerlich, ja in den meisten Fällen, z. B. bei allen massiven Körpern, gar nicht möglich sein. — Wie die Flächenmaße, so sind auch die Kubikmaße nur ein mittelbares Maß, und man mißt in Wirklichkeit nur Linien, um durch Berechnung daraus zu finden, wie oft die betreffende Kubikeinheit in dem zu messenden Körper enthalten ist.

I. Berechnung des Kubikinhaltes: Der Lehrer veranschaulicht auf ähnliche Weise, wie in § 75, z. B. an einem Würfel von 6 cm Kantenlänge durch Zerlegung in 6 Schichten, von denen jede 6.6 = 36 ccm nebeneinander enthält, so daß der ganze Inhalt 6.6.6 = 216 ccm beträgt.

Regel: Man findet den Inhalt eines Würfels, indem man eine Kante mißt und diese Maßzahl dreimal als Faktor setzt, oder kürzer: indem man eine Kante zur 3ten Potenz oder zum Kubus erhebt.

[Formel: $J = a.a.a = a^3$, wenn a eine Kante bezeichnet.]

Selbstverständlich geben m, cm, mm der Kante cbm, ccm bzw. cmm beim körperlichen Inhalt.

II. Berechnung einer Kante: Ein Würfel habe 125 ccm Inhalt; es soll daraus die Länge einer Kante gefunden werden. Die Kante muß so viel cm lang sein, daß diese Zahl, 3mal als Faktor gesetzt, wieder 125 ergiebt. Wir müssen die Kubikwurzel aus 125 ziehen = 5. Die Kante beträgt somit 5 cm. Mache die Probe!

Regel: Man findet die Kante aus dem Inhalte eines Würfels, indem man aus demselben die Kubikwurzel zieht. $\left(a = \sqrt[3]{J.}\right)$

Da das Ausziehen der Kubikwurzel in vielen unter denjenigen Schulen, für welche unser Buch bestimmt ist, im Rechenunterricht schwerlich zu erreichen ist, so lasse der Lehrer hier die Kubikzahlen von 1—10 und von 10, 20, 30 bis 100 bilden und lernen; dann können doch bei nicht

Digitized by Google

zu großen Zahlen die Grenzwerte für die Kubikwurzeln angegeben werden; z. B. $\sqrt[3]{600}$ liegt zwischen 8 und 9. Über die methodische Behandlung für das Ausziehen der Kubikwurzel giebt jedes Rechenwerk ausführlich Aufschluß.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

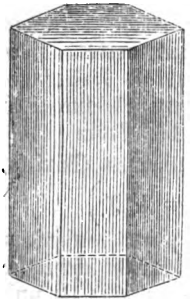
1. Wie berechnet man bei einem Würfel: a) den Inhalt aus der Kante; b) die Kante aus dem Inhalt?
2. Bilde die Kubikzahlen von 1—10, dann von 10, 20, 30 bis 100 und lerne dieselben!
3. Berechne den Inhalt eines Würfels von 2 cm und eines zweiten von 6 cm Kantenlänge! Die Kanten verhalten sich wie 1:3, wie aber die Inhalte? Wie verhalten sich also die Inhalte zweier Würfel? (Und umgekehrt: wie verhalten sich die Kanten zweier Würfel, deren Inhaltsverhältnis gegeben ist?)
4. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 32 und 33, Nr. 24—26 [34, 35, 37, 38, 39].

§ 77. Beschreibung der Prismen oder der kantigen (eckigen) Säulen.

I. Wesen des Prismas: Der Lehrer stellt als Veranschaulichungsmittel eine Anzahl verschiedener Prismen auf, 3-, 4- und mehrseitige, gerade und schiefe. Er läßt sich an den einzelnen die obere und untere Grundfläche, die Seitenflächen, obere und untere Grundkanten und Seitenkanten, die oberen und unteren Ecken zeigen und bestimmen. Weitere Fragen führen sodann zur Definition des Prismas: Wieviel Grundflächen haben alle diese Körper? (2.) Wie laufen dieselben? Was für Figuren können es sein? Vergleiche sie nach Form und Größe! Was für Figuren sind sämtliche Seitenflächen? (Parallelogramme.) Vergleiche die Anzahl derselben mit der Seitenzahl der Grundfläche! Solche Körper heißen Prismen; Einzahl Prisma.

Erklärung: Ein Prisma ist also ein Körper, welcher zwei kongruente und parallele geradlinige Figuren als Grundflächen und so viel Parallelogramme als Seitenflächen hat, wie die Grundfläche Seiten hat.

Fig. 168.



Das Prisma hat von unten nach oben gleiche Stärke; man könnte es sich auch so entstanden denken, daß sich eine geradlinige Figur parallel zu sich selbst — senkrecht oder schräg — fortbewegt.

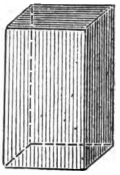
II. Arten: a) Nach der recht- oder schiefwinkligen Stellung der Seitenkanten zur Grundfläche unterscheidet man gerade oder senkrechte und schiefe Prismen. In einfachen Schulverhältnissen wird man von den schiefen Prismen ganz absehen.

b) Nach der Anzahl der Seitenflächen teilt man die Prismen in drei-, vier- und mehrseitige ein, z. B. das sechsseitige Prisma in Fig. 168. — Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so wird dieses Prisma von lauter (6) Parallelogrammen begrenzt; man

Digitized by Google

nennt es darum ein Parallelepipedon (Fig. 169). Die Grundflächen eines solchen können wieder Quadrate, Rechtecke, Rhomben und Rhomboide sein, wonach wieder quadratische, rechteckige (oblongische), rhombische und rhomboidische Parallelepipeda oder Säulen unterschieden werden können. Die beiden erstgenannten heißen auch — vorausgesetzt, daß sie gerade Prismen darstellen — mit einem gemeinschaftlichen Namen rechtwinklige Parallelepipeda, weil an ihnen nur rechte Winkel vorkommen.

Fig. 169.



c) Je nachdem die Grundflächen regelmäßige oder unregelmäßige Figuren sind, spricht man bei den geraden Prismen auch von regelmäßigen und unregelmäßigen. Welches Parallelepipedon ist als reguläres Prisma zu bezeichnen? (Das quadratische.)

III. Vorkommen: In der Natur an verschiedenen Krystallen, die sechsseitigen Prismen z. B. am Quarz, an Basaltsäulen ꝛc. An verfertigten Gegenständen finden sich meist nur gerade Prismen, und von diesen wieder das rechtwinklige Parallelepipedon am meisten, z. B. Mauersteine, Balken, Schränke, Kasten, Bretter, Bücher, Stuben, Wände; dreiseitige Prismen finden wir an Dächern (liegend), in dem Glasprisma der Lichtlehre; sechs- und achtseitige Prismen als Säulen in Kirchen ꝛc.

IV. Netze von geraden Prismen: Dieselben werden durch Aufklappen der Pappmodelle veranschaulicht. Fig. 170 zeigt das Netz des reg. dreiseitigen Prismas, Fig. 171 das eines rechtwinkligen Parallelepipedons. Das Netz eines reg. sechsseitigen Prismas würde aus sechs kongruenten Rechtecken und zwei kongruenten Sechsecken bestehen ꝛc.

Fig. 170.

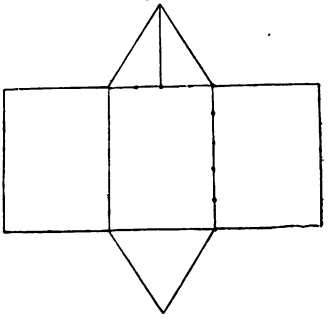
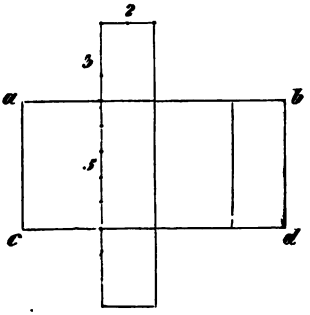


Fig. 171.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist ein Prisma?
2. Wie teilt man die Prismen ein: a) nach der Stellung der Seitenkanten zur Grundfläche; b) nach der Zahl der Seitenflächen; c) die geraden wieder nach der Beschaffenheit der Grundfläche?
3. Was für ein Prisma ist ein Parallelepipedon? Was für Parallelepipeda unterscheidet man?
4. Zu welchen Prismen gehört der Würfel?
5. Bestimme für das fünf-, sechs- und n-seitige Prisma: a) die Zahl sämtlicher Begrenzungsflächen; b) die Zahl der oberen und unteren Grundkanten, der Seitenkanten, sodann sämtlicher Kanten; c) die Zahl der Ecken!

Digitized by Google

6. Was gilt bei allen Prismen von der Länge und Richtung aller Seitenkanten? Bei welchen Prismen sind die Grundkanten unter einander gleich?
7. Zeichne die Netze einer reg. drei- und sechsseitigen, sowie einer quadratischen Säule und stelle die betreffenden Prismen daraus her!

§ 78. Berechnung der Prismen.

I. Berechnung der Oberfläche: An den Netzen der geraden Prismen, z. B. Fig. 170 u. 171, erkennen die Schüler, daß die Seitenflächen ein einziges Rechteck bilden, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und eine Seitenkante zur Höhe hat, daher der Flächeninhalt = Umfang der Grundfläche mal Höhe des Prismas. Addiert man dazu die doppelte Grundfläche, so erhält man die ganze Oberfläche.

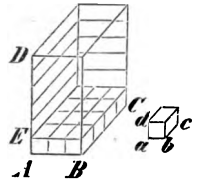
II. Inhaltsberechnung: Man gehe von einem rechtwinkligen Parallelepipedon aus (Fig. 169). Die Grundkanten desselben — Länge und Breite — seien 3 cm und 2 cm, eine Seitenkante, die Höhe, 5 cm. In wieviel qcm läßt sich die Grundfläche zerlegen? (3.2 = 6 qcm.) Wieviel ccm haben daher auf dem Boden des Prismas nebeneinander Platz? (Fig. 172.) Wie hoch wird eine solche Schicht? (1 cm.) Die ganze Höhe beträgt 5 cm. Wieviel solche Schichten können daher übereinander liegen? (5.) Wieviel ccm sind dies? (5.6 = 30.)

Fig. 172.

Regel: Man berechnet den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons, indem man die Grundfläche mit der Höhe multipliziert (oder Länge mal Breite mal Höhe).

Recht anschaulich, allerdings etwas umständlich, läßt sich diese Regel entwickeln, wenn man ein durch Drähte oder Stäbe dargestelltes rechtwinkliges Parallelepipedon mit Würfeln aus einem Baukasten ausfüllt, wie Fig. 173 zeigt: Auf der Grundfläche 4.3 = 12 Würfel, sechs solche Schichten = 6.12 = 72 Würfel. — Auch das Parallelepipedon mit einem schiefwinkligen Parallelogramm als Grundfläche erfordert dieselbe Berechnung. Das Rhomboid habe z. B. eine Grundlinie von 3 und eine Höhe, die auf der Grundfläche erst gezogen werden muß, von 2 cm, so beträgt die Grundfläche wie im ersten Beispiele 6 qcm. Auf ihr können also eben auch 12 ccm stehen. Allerdings könnten dieselben nicht ohne weiteres nebeneinander gestellt werden; sondern man müßte erst einzelne zerteilen, um die schiefen Winkel auszufüllen. Beträgt die Seitenkante oder Höhe des Prismas auch 5 cm, so enthält der ganze Körper 5.6 = 30 ccm. Es gilt also für jedes Parallelepipedon dieselbe Regel wie für das rechtwinklige. — So ist es auch bei jedem andern geraden Prisma. Da die Grundfläche stets angiebt, wieviel Kubikeinheiten auf ihr neben einander stehen können, und die Höhe, wieviel solcher Schichten über einander liegen können, so ist der Inhalt jedes Prismas = Grundfläche mal Höhe. (J = G.h.)

Fig. 173.

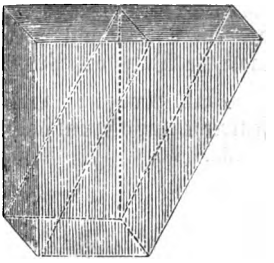


[Will man diese Regel auch für die schiefen Prismen begründen,

Digitized by Google

so kann dies anschaulich geschehen, indem man sich Pappkörper entsprechend der Fig. 174 herstellt, etwa ein in zwei dreiseitige Prismen zerlegbares gerades Parallelepipedon, welches sofort in ein schiefes verwandelt wird, wenn man das eine dreiseitige Prisma von der einen Seite nimmt und an die entgegengesetzte hält. — Auch durch folgende Erörterung leuchtet die Allgemeingültigkeit obiger Regel ein: Denken wir uns viele kongruente dünne Platten übereinandergelegt, so erhalten wir beim senkrechten Aufbau ein gerades, beim schiefen Aufbau ein schiefes Prisma, beide mit gleicher Grundfläche und Höhe und, da sie aus denselben Platten gebildet sind, auch mit gleichem Inhalte.

Fig. 174.



Gesetz: Jedes schiefe Prisma ist gleich dem geraden, mit welchem es gleiche Grundfläche und Höhe hat, daher auch gleich Grundfläche mal Höhe. — Nur darf man nicht außer Acht lassen, daß die Höhe hier nicht gleich einer Seitenkante ist, sondern erst von der oberen nach der unteren Grundfläche gefällt werden muß.]

III. Berechnung der Grundfläche und Höhe aus dem Inhalt: Auf gleiche Weise wie in der Planimetrie beim Parallelogramm (§ 44) finden die Schüler die beiden Regeln: Man berechnet die Grundfläche eines Prismas aus dem Inhalt, indem man denselben durch die Höhe dividiert, und die Höhe, indem man den Inhalt durch die Grundfläche dividiert. $\left(h = \frac{J}{G};\ G = \frac{J}{h}.\right)$

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie berechnet man die Oberfläche eines geraden Prismas?
2. Wie berechnet man bei jedem Prisma: a) den Inhalt, b) die Grundfläche und c) die Höhe aus dem Inhalt?
3. Wie verhalten sich: a) Prismen mit gleicher Grundfläche und Höhe, b) Prismen mit gleicher Höhe, c) Prismen mit gleicher Grundfläche?
4. Miß den Rauminhalt unserer Schulstube aus und berechne, wieviel Raum durchschnittlich auf einen Schüler kommt!
5. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 30—35. (Auswahl!)

§ 79. Beschreibung des Cylinders oder der Walze oder Rundsäule.

I. Vorkommen: In der Natur: Baumstämme, Blatt- und Blütenstiele, tierische Körper, Würmer ꝛc. Verfertigte Gegenstände: Lampencylinder, Cylinderhut, Ackerwalze, runde Säulen bei Bauten, Mühl- und Schleifsteine, Hohlmaße, Röhren, Gläser, runde Scheiben ꝛc.

II. Wesen: Der Lehrer stellt neben einigen prismatischen Körpern cylinderförmige Körper auf, läßt sich daran Grund- und Seitenflächen zeigen. Grund- und Seitenkanten? Ecken? Durch Erfragen der einzelnen Hauptmerkmale wird die Erklärung entwickelt: Ein Cylinder ist

Digitized by Google

ein Körper, welcher zwei parallele und gleiche Kreise als Grundflächen und eine einseitig gekrümmte Seitenfläche hat. — Vergleiche den Cylinder mit dem Prisma nach der Zahl und Art der Grundflächen und Seitenflächen, sodann nach der durchgehends gleichen Dicke. Wie der Kreis als ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten zu betrachten ist, so kann man die Walze als Prisma mit unendlich vielen Seitenflächen auffassen.

III. Arten: Bei den meisten Cylindern steht die Seitenfläche senkrecht zur Grundfläche. Steht dieselbe schiefwinklig, so nennt man den Cylinder einen schiefen (Fig. 176). Wenn vom Cylinder schlechthin in unserer weiteren Betrachtung die Rede ist, so ist stets der gerade (Fig. 175) gemeint.

Fig. 175.

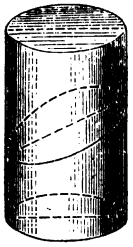
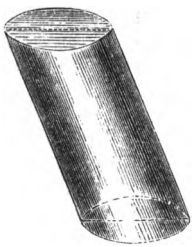


Fig. 176.



IV. Wichtige Linien am Cylinder: Eine Linie, welche die Mitten beider Grundflächen verbindet, heißt die Achse, da sich der Cylinder um diese drehen kann. (Ackerwalze.) Da sie beim geraden Cylinder senkrecht zur Grundfläche steht, so ist sie zugleich die Höhe desselben. Eine gerade Linie an der Seitenfläche, welche zwei gegenüberliegende Punkte der beiden Kreisumfänge verbindet, heißt Seitenlinie, oder, da man die krumme Seitenfläche den Cylindermantel nennt, auch Mantellinie. Alle Seitenlinien sind unter einander und der Achse parallel und daher auch gleich, beim geraden Cylinder also auch gleich der Höhe desselben.

V. Schnittflächen: An einem cylinderförmigen Baumzweige können diese leicht veranschaulicht werden. Jede zur Grundfläche parallele Schnittfläche ergiebt einen gleich großen Kreis; ein schräger Schnitt bildet eine Ellipse. Ein Schnitt durch die Achse eines geraden wird ein Rechteck, halbiert beide Grundflächen und auch den Cylinder selbst.

VI. Entstehung: a) Durch Drehung eines Rechtecks um eine Seite entsteht ein gerader Cylinder. (Veranschaulichen an einem Brettchen! Thür, welche sich in den Angeln dreht.) Was wird die Rechtecksseite, um die sich das Rechteck dreht? (Achse.) Ihre beiden Endpunkte? (Kreismittelpunkte.) Die sich drehende Rechtecksseite? (Mantellinie.) Die wagerechten Rechtecksseiten? (Kreishalbmesser.)

b) durch Fortbewegung eines Kreises, parallel mit sich selbst, entsteht bei senkrechter Richtung ein gerader, bei schiefer ein schiefer Cylinder.

[c) Auf der Drehbank durch Entkanten eines Prismas.]

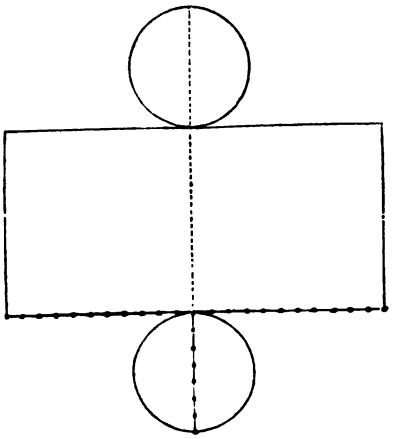
VII. Netz: Wickelt man den Mantel eines geraden Cylinders von einer Seitenlinie aus auf, so entsteht ein Rechteck, welches den Kreisumfang zur Grundlinie und eine Seitenlinie oder die Höhe des Cylinders zur Höhe hat. Zeichnet man einen Kreis oben und unten daran, so hat man das Netz des Cylinders. Dabei beachte man, daß Kreisumfang und Grundlinie des Rechtecks gleiche Länge haben, daß

Digitized by Google

sich also Kreisdurchmesser und Grundlinie des Rechtecks wie $1:3\frac{1}{7}$ oder $= 7:22$ verhalten müssen (Fig. 177).

Welche Gestalt muß das ausgeschnittene Blech haben, aus welchem der Klempner ein oben offenes Litermaß herstellt? —

Fig. 177.



Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist ein Cylinder? Welche zwei Arten unterscheidet man?
2. Erkläre die Ausdrücke: Mantel, Achse, Höhe, Seitenlinie!
3. Welche drei Arten von Schnittflächen erhält man beim geraden Cylinder?
4. Zeichne das Netz eines Cylinders von 7 cm Durchmesser und 15 cm Höhe und fertige einen Cylinder daraus!

§ 80. Berechnung des Cylinders.

I. Berechnung der Oberfläche. a) Die Mantelfläche: am Netz (Fig. 177) erkennen die Schüler, daß der Mantel als Rechteck = Grundlinie mal Höhe, d. i. hier Kreisumfang mal Höhe des Cylinders ist. $(2r.\pi.h.)$

b) Die Grundfläche ist als Kreis = Radiusquadrat mal 3,14; beide Kreise doppelt so viel. $(2r^2.\pi.)$

c) Die ganze Oberfläche ist daher die Summe der beiden vorigen Ergebnisse. $[2r\,\pi.h + 2r^2.\pi = 2r.\pi.(h + r).]$

II. Berechnung des Inhalts: Da der Cylinder als ein Prisma anzusehen ist, so wird auch sein Inhalt „Grundfläche mal Höhe" berechnet. Die Grundfläche ist als Kreis = Radiusquadrat mal 3,14, also der Inhalt des Cylinders = Radiusquadrat mal 3,14 mal Höhe. $[J = r^2.\pi.h.]$

Wie beim Prisma, so gilt auch hier diese Regel für den schiefen Cylinder wie für den geraden.

Daß die schiefen Säulen den Unkundigen größer scheinen als die entsprechenden geraden, wissen besonders die Fleischer; jedermann weiß ja, welche Schnitte dieselben anwenden, wenn sie für einige Pfennige Wurst verkaufen.

III. Berechnung der Höhe und des Kreishalbmessers aus dem Inhalt: Wie beim Prisma, findet man hier auch die Höhe, indem man den Inhalt des Cylinders durch die Grundfläche dividiert, $\left(h = \frac{J}{G} \text{ oder } = \frac{J}{r^2.\pi}\right)$ und die Grundfläche, indem man den Inhalt

Digitized by Google

durch die Höhe dividiert. $\left(G = \frac{J}{h}.\right)$ Wie man aber aus der Kreisfläche den Halbmesser berechnet, siehe § 65 II.

$$\left(r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{J}{h.\pi}}.\right)$$

IV. Inhalt einer Hohlwalze: Hohle Walzen, wie Wasserrohre, Türme ꝛc., sind, von ihren Grundflächen aus gesehen, ringförmige Körper, deren Inhalt man findet, wenn man von dem Inhalt des ganzen Cylinders den Inhalt des inneren Cylinders, des Hohlraumes, abzieht. [$R^2.\pi.h - r^2.\pi.h$ oder $(R^2 - r^2).\pi.h$.]

[V. Cylinderartige Gefäße mit elliptischer Grundfläche (Fig. 178): Der Inhalt ist ebenfalls = Grundfläche mal Höhe. Berechnung der elliptischen Grundfläche siehe § 70 I.

$[J = a.b.\pi.h.]$

Fig. 178.

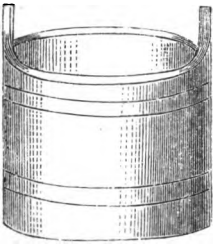
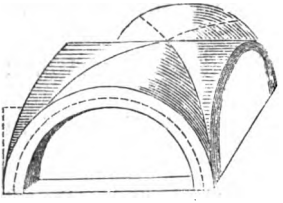
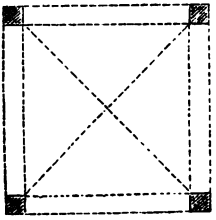


Fig. 179.





[VI. Tonnengewölbe stellen liegende Halbcylinder oder andere Teile eines liegenden Cylinders dar; ihr innerer Raum beträgt stets den Teil des ganzen Cylinders, welchen der Kreisausschnitt, die Grundfläche, vom ganzen zugehörigen Kreise (oder der Centriwinkel von 360°) bildet. $\left(= \frac{r^2.\pi.h.n}{360},\right.$ wenn n die Anzahl der Grade des Centriwinkels angiebt.) — Fig. 179 zeigt ein Kreuzgewölbe, welches aus zwei sich kreuzenden Tonnengewölben besteht. Das Quadrat unter Fig. 179 zeigt die Basis des darüberstehenden Kreuzgewölbes.]

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie berechnet man: a) den Mantel, b) die ganze Oberfläche des geraden Cylinders?
2. Wie berechnet man: a) den Inhalt jedes Cylinders, b) die Höhe, c) den Halbmesser der Grundfläche aus dem Inhalte des Cylinders?
3. Wie verhalten sich: a) Cylinder mit gleicher Grundfläche und Höhe, b) Cylinder mit gleicher Grundfläche, c) Cylinder mit gleicher Höhe?
4. Miß Radius der Grundfläche und Höhe einzelner cylindrischen Gefäße aus und berechne: a) den Mantel, b) den Inhalt derselben!
5. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 36—40.

Digitized by Google

Kapitel 13.

Körper mit nach oben abnehmender Dicke (pyramidenartige Körper).

§ 81. Beschreibung der Pyramide oder Spitzsäule.

I. Vorkommen. In der Natur: Alaun- und Quarzkrystalle ꝛc. Verfertigte Gegenstände: Königsgräber der Ägypter, Turmspitzen, Denkmäler, Zeltdächer, Feilen ꝛc.

II. Wesen: Der Lehrer stellt mehrere Pyramiden — drei-, vier- und sechsseitige, gerade und schiefe — neben einigen Prismen auf, läßt sich an den Pyramiden die Grundfläche, die Seitenflächen, Grund- und Seitenkanten und die Spitze zeigen. Fragen: Wieviel Grundflächen haben alle diese Körper nur? (1.) Was für Figuren sind es? Was für Figuren sind alle Seitenflächen? Vergleiche die Anzahl der Seitenflächen mit der Seitenzahl der Grundfläche! Das Prisma war von unten nach oben gleich dick, hatte deshalb oben noch eine Deckfläche (obere Grundfläche). Wie werden diese Körper nach oben zu? Worin vereinigen sich sämtliche Seitenflächen? Man nennt diese Körper deshalb Spitzsäulen oder, nach den ägyptischen Bauten, Pyramiden.

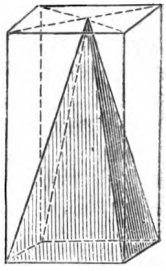
Erklärung: Eine Pyramide ist ein Körper, welcher eine geradlinige Figur als Grundfläche und soviel Dreiecke, die sich in einer Spitze vereinigen, zu Seitenflächen hat, als die Grundfläche Seiten hat.

III. Arten: a) Liegt die Spitze senkrecht über der Mitte der Grundfläche (oder trifft die von der Spitze aus gefällte Höhe den Mittelpunkt der Grundfläche), so heißt die Pyramide gerade oder senkrecht, andernfalls schief. Von letzterer sehen wir hier ab.

b) Ist die Grundfläche der geraden Pyramide eine regelmäßige Figur, so heißt die Pyramide eine reguläre. Diese ist als die wichtigste anzusehen.

c) Nach der Anzahl der Seitenflächen unterscheidet man, wie beim Prisma, drei-, vier- und mehrseitige Pyramiden (Fig. 164 und 180).

Fig. 180.



IV. Netze: Man begnüge sich mit den Netzen der reg. Pyramiden. Durch Aufklappen der Pappkörper ergeben sich dieselben. — Die Seitenflächen können sternförmig um die Grundfläche herumgelegt — wie das Netz der dreiseitigen Pyramide in Fig. 181 — oder alle dicht nebeneinander gezeichnet werden — wie das Netz der vierseitigen oder quadratischen Pyramide in Fig. 182.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist eine Pyramide? Wie unterscheidet sie sich vom Prisma?
2. Wie teilt man die Pyramiden nach der Zahl der Seitenflächen ein?
3. Was gilt von der regulären Pyramide: a) von der Lage der Spitze zur Grundfläche, b) von der Länge aller Grundkanten, c) von der Länge aller Seitenkanten?

Digitized by Google

4. Zeichne die Netze von der reg. vier- und sechsseitigen Pyramide und stelle die Körper daraus her!

Fig. 181.

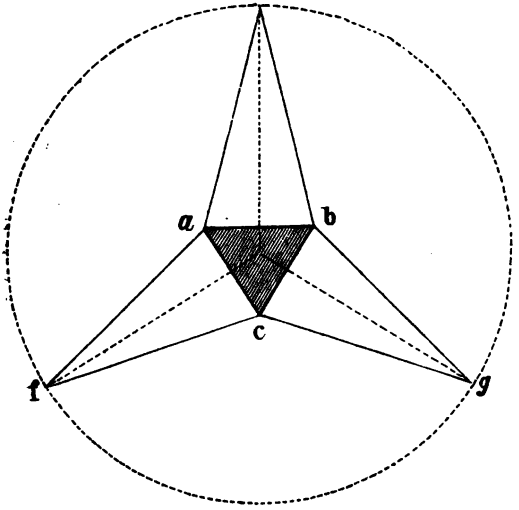
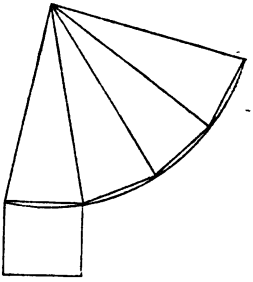


Fig. 182.



§ 82. Berechnung der Pyramide.

I. Oberfläche: Man hat zunächst die Grundfläche, dann die Seitenflächen auszumessen und zu berechnen und sämtliche Ergebnisse zu addieren. Da bei der reg. Pyramide alle Seitenflächen kongruente Dreiecke sind, so braucht man nur eine zu berechnen und kann dann dieselbe mit der Anzahl der Seitenflächen multiplizieren. — Ist statt der Seitenhöhe der Dreiecke die Höhe der Pyramide gegeben, so muß man erst die Seitenhöhe suchen. Man findet sie leicht durch folgende Betrachtung: Vom Mittelpunkte der Grundfläche bis zur Spitze der Pyramide hat man eine senkrechte Linie, welche die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks bildet; die andere Kathete ist die Linie vom Mittelpunkt der Grundfläche bis zur Mitte der Grundlinie des Seitendreiecks; die Seitenhöhe des Pyramidendreiecks bildet dann die Hypotenuse. Mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes läßt sich dann leicht die Seitenhöhe (die Hypotenuse) suchen. Noch leichter läßt sich aus der Seitenlänge der gleichschenkligen Dreiecke die Höhe finden; wie nämlich?

II. Inhalt: a) Hat man eine quadratische Pyramide und ein quadratisches Prisma mit gleicher Grundfläche und Höhe, beide aus Blech gefertigt (Fig. 180), so läßt sich das Verhältnis zwischen Pyramide und Prisma sehr leicht veranschaulichen. Man schüttet den Inhalt der mit Wasser oder Sand gefüllten Pyramide in das Prisma. Die Schüler erkennen, daß dies dreimal geschehen kann, während sie gewöhnlich vorher meinen, es wäre nur zweimal möglich.

Gesetz: Die Pyramide ist $\frac{1}{3}$ desjenigen Prismas, welches mit

Digitized by Google

ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat, wird daher berechnet: Grundfläche mal Höhe, dividiert durch 3. $\left(J = \frac{G.h}{3}.\right)$

b) Schwieriger ist die Ableitung obiger Regel aus der Zerlegung eines dreiseitigen Prismas. Zu dem Zweck braucht man ein aus einer Rübe oder aus Thon geschnittenes dreiseitiges Prisma; oder man fertigt sich gleich — auch für spätere Fälle — ein dreiseitiges Prisma aus Holz an, welches in 3 dreiseitige Pyramiden auseinandergelegt werden kann. An dem dreiseitigen Prisma a b c d f g (Fig. 183) führen wir von der obern vorderen Ecke c einen Schnitt durch die beiden Diagonalen c d und c g bis zur unteren Grundkante d g, so wird die dreiseitige Pyramide c d f g vorn abgetrennt (Fig. 183 I). Führt man nun einen zweiten Schnitt von der unteren Ecke g durch die beiden Diagonalen g a und g c bis zur oberen Grundkante a c, so wird die mit der Spitze nach unten gerichtete dreiseitige Pyramide g a b c hinten abgetrennt (Fig. 183 II). Es bleibt nun noch eine dritte, ganz unregelmäßige

Fig. 183.

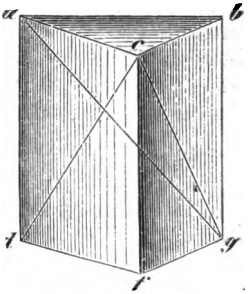


Fig. 183 I.

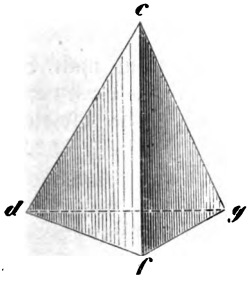


Fig. 183 II.

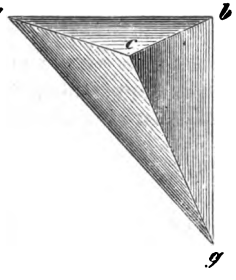
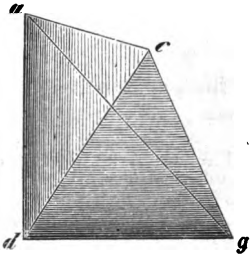


Fig. 183 III.



dreiseitige Pyramide c a d g übrig (Fig. 183 III). Sind die drei Körper massiv, so läßt sich mittelst des Gewichts die Inhaltsgleichheit derselben feststellen.*)

Daraus folgt zunächst: Eine dreiseitige Pyramide ist $^1/_3$ von dem dreiseitigen Prisma, mit welchem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat.

*) Die Begründung der Gleichheit würde den Satz als schon bekannt voraussetzen, daß Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich sind; denn je zwei dieser drei Pyramiden haben gleiche Grundfläche und Höhe: Bei Pyramide I und II ist dies leicht zu ersehen; die Pyramiden II und III lege man erst so um, daß die gemeinsame Spitze c nach oben gerichtet und die beiden (als Diagonaldreiecke des Parallelogramms a b g d) gleichen Grundflächen a b g und a d g unten zu liegen kommen; dann erkennt man an diesen Pyramiden auch die Gleichheit der Grundflächen und der Höhe (aus der Spitze c), woraus die Inhaltsgleichheit folgt. — Der Beweis aber von der Inhaltsgleichheit der Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe durch Zurückführung auf den Grundsatz von Cavaleri (Körper mit gleicher Grundfläche und Höhe und gleichen Schnittflächen in gleichen Abständen haben gleichen Rauminhalt) würde hier zu weit führen.

Digitized by Google

Um dies auch auf die mehrseitigen Pyramiden zu übertragen, denken wir uns z. B. ein sechsseitiges Prisma und eine sechsseitige Pyramide mit gleicher Grundfläche und Höhe. Ersteres läßt sich durch Schnitte von den Diagonalen der unteren Grundfläche nach den entsprechenden Diagonalen der oberen Grundfläche in vier dreiseitige Prismen, und die sechsseitige Pyramide durch Schnitte von den Diagonalen der Grundfläche nach der Spitze in vier dreiseitige Pyramiden zerlegen. Je eine der vier dreiseitigen Pyramiden ist nach voriger Entwicklung $^1/_3$ von dem entsprechenden dreiseitigen Prisma, also auch die Summe der vier dreiseitigen Pyramiden $^1/_3$ von der Summe der vier dreiseitigen Prismen oder die ganze sechsseitige Pyramide $^1/_3$ von dem sechsseitigen Prisma. Also gilt ganz allgemein das Gesetz: Jede Pyramide ist $^1/_3$ desjenigen Prismas, mit welchem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat. Daher ist ihr Inhalt = Grundfläche mal Höhe, dividiert durch 3. $\left(J = \frac{G.h}{3}.\right)$

III. Berechnung von Höhe und Grundfläche aus dem Inhalt: Der Inhalt einer Pyramide betrage 80 ccm, die Grundfläche 30 qcm; wie groß ist die Höhe? Das Prisma, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat, würde 3.80 = 240 ccm enthalten. Da dessen Grundfläche 30 qcm hat, so ist die Höhe

$$= \frac{240}{30} = 8 \text{ cm.} \quad (\S\ 78\ \text{III.})$$

Regel: Man findet die Höhe einer Pyramide, indem man den dreifachen Inhalt durch die Grundfläche dividiert, und ebenso die Grundfläche, indem man den dreifachen Inhalt durch die Höhe dividiert. $\left(h = \frac{3J}{G};\ G = \frac{3J}{h}.\right)$

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie verhält sich eine Pyramide zu ihrem Prisma, d. h. zu demjenigen, mit welchem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat?
2. Wie berechnet man: a) den Inhalt einer Pyramide, b) die Grundfläche und c) die Höhe aus dem Inhalte?
3. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 41 und 43, Nr. 1—7 und 18.

§ 83. Beschreibung des Kegels oder der runden Spitzsäule.

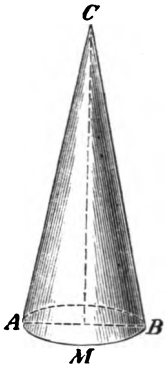
I. Vorkommen: In der Natur: Möhre und andere Wurzeln, manche Baumstämme, z. B. Edeltanne ꝛc. Verfertigte Gegenstände: Trichter, Zuckerhut, runde Turmspitzen, Tüten ꝛc.

II. Wesen: Der Lehrer stellt kegelförmige Papp- oder Holzkörper neben einigen Pyramiden auf und läßt sich an ersteren Grund- und Seitenfläche, Grundkante (Seitenkanten?), Ecke oder Spitze zeigen. Nachdem einzelne Fragen nach Zahl und Art der Grundflächen und der Seitenflächen gestellt worden sind, fassen die Schüler die Antworten zu einer kurzen Beschreibung zusammen, um dann die Begriffserklärung etwa

Digitized by Google

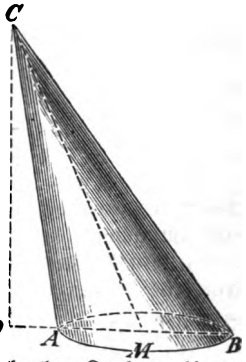
so aussprechen zu können: Ein Kegel ist ein Körper, welcher einen Kreis als Grundfläche und eine einseitig gekrümmte Seitenfläche hat, die in eine Spitze ausläuft (Fig. 184). — Vergleiche den Kegel mit der Pyramide nach Zahl und Art der Grund- und Seitenflächen, sodann bezüglich der Verjüngung nach oben bis zur Spitze! Wie der Cylinder als Prisma, so kann der Kegel als Pyramide mit unendlich vielen Seitenflächen aufgefaßt werden.

Fig. 184.



III. Wichtige Linien am Kegel: Eine Linie, welche die Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche verbindet, heißt die Achse, CM, ein Lot von der Spitze nach der Grundfläche oder deren Verlängerung die Höhe (in Fig. 184 CM, in Fig. 185 CD), eine gerade Linie auf der Seitenfläche oder dem Mantel von der Spitze nach einem Punkte des Kreisumfanges Seitenlinie oder Mantellinie, z. B. CA und CB.

Fig. 185.



IV. Arten: Bei den meisten Kegeln liegt die Spitze senkrecht über der Mitte der Grundfläche, so daß also die Achse mit der Höhe zusammenfällt. Solche Kegel heißen gerade oder senkrechte Kegel (Fig. 184). Steht die Achse schiefwinklig zur Grundfläche, so nennt man den Kegel einen schiefen (Fig. 185).

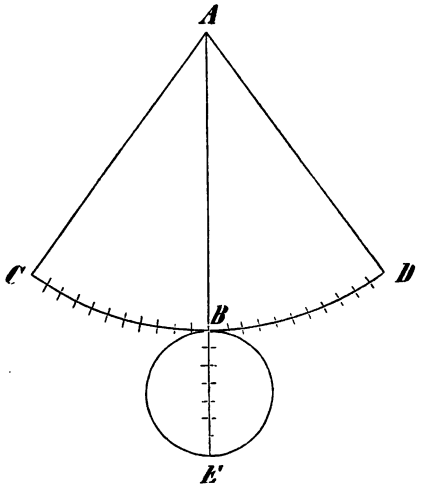
V. Entstehung: Man halte ein aus Pappe ausgeschnittenes rechtw. Dreieck so, daß die eine Kathete wagerecht liegt und die andere senkrecht steht, und drehe das Dreieck um die senkrechte Kathete, bis es in seine erste Lage zurückkehrt, so ist der durchlaufene Raum ein gerader Kegel. Was wird die Kathete, um die sich das rechtw. Dreieck dreht? (Achse oder Höhe.) Ihre beiden Endpunkte? (Spitze und Kreismittelpunkt.) Die wagerechte Kathete? (Halbmesser.) Die Hypotenuse? (Seitenlinie.) Wie sind daher alle Seitenlinien des geraden Kegels? (Gleich, als Hypotenusen kongruenter rechtwinkliger Dreiecke.)

VI. Kegelschnitte: An einer Rübe zu veranschaulichen. Ein Schnitt von der Spitze durch die Achse bis zu einem Durchmesser der Grundfläche ergiebt beim geraden Kegel stets ein gleichschenkliges Dreieck und halbiert den Kegel. Über die anderen Schnittflächen, Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel siehe § 16, 7 und Fig. 39.

VII. Netz: Nur vom geraden Kegel läßt sich die Mantelfläche in einer Ebene ausbreiten, also ein Netz zeichnen. Durch Aufrollen des Pappmodells (Fig. 186) erkennen die Schüler, daß der Mantel einen Kreisausschnitt ergiebt, welcher den Umfang der Grundfläche als Bogen und die Seitenlinie zum Radius hat. Soll Kreis und Mantelfläche

Digitized by Google

Fig. 186.



zusammenpassen, so muß der Bogen des Kreisausschnittes dieselbe Länge haben wie die Peripherie des Grundkreises. Das hierzu nötige Konstruktionsverfahren ist für einfache Schulverhältnisse zu schwierig. Im folgenden Paragraphen ist es durch Berechnung festgestellt.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist ein Kegel? Welche zwei Arten unterscheidet man?
2. Erkläre die Ausdrücke: Mantel, Achse, Höhe, Seitenlinie!
3. Welche Schnittflächen erhält man am Kegel?
4. Zeichne einen beliebigen Kreisausschnitt, rolle ihn zum Kegel zusammen und füge dann den dazu passenden Grundkreis hinzu!

§ 84. Berechnungen am Kegel.

I. Linien: a) Nach § 15 kann aus dem Halb- oder Durchmesser der Grundfläche der Umfang des Kreises und umgekehrt aus dem Umfange wieder der Halb- und Durchmesser berechnet werden.

b) Auf Grund des Pythagoreischen Lehrsatzes (§ 54) läßt sich beim geraden Kegel aus je zwei der drei Linien Radius, Höhe und Seitenlinie die dritte berechnen. [$s = \sqrt{h^2 + r^2}$; $h = \sqrt{s^2 - r^2}$; $r = \sqrt{s^2 - h^2}$.]

[c) Nach vorigem § muß der Bogen des Kreisausschnittes, welchen der Kegelmantel ergiebt, gleich der Peripherie der Grundfläche sein. Nehmen wir an, der Centriwinkel des Kreisausschnittes (Fig. 186), $\measuredangle$ CAD, betrage 72°; dann ist der Bogen CD $\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$ der ganzen Peripherie, also auch die Peripherie der Grundfläche $\frac{1}{5}$ von der ganzen Peripherie desjenigen Kreises, von dem der Kreisausschnitt ein Teil ist. (Radius AC.) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich aber wie ihre Halbmesser; folglich muß auch der Halbmesser BM $\frac{1}{5}$ des Halbmessers oder der Seitenlinie AC sein.

Gesetz: Der Halbmesser der Grundfläche ist derselbe Teil der Seitenlinie wie der Centriwinkel des Mantels von 360°, und umgekehrt*).

*) Allgemeine Begründung mit Buchstaben: Peripherie der Grundfläche und zugleich der Bogen des Kreisausschnittes $= 2r.\pi$; Peripherie des ganzen Kreises, dem der Kreisausschnitt angehört, (mit dem Halbmesser AC $= s$) ist $= 2s.\pi$. Der Kreisbogen verhält sich also zur ganzen Peripherie desselben Kreises $= 2r.\pi : 2s.\pi$ oder, durch 2π gekürzt, $= r:s$. Ebenso muß sich der Centriwinkel zu 360° verhalten (vgl. § 67).

Digitized by Google

Somit bestimmen je zwei der drei Stücke: Radius, Seitenlinie und Centriwinkel des Kreisausschnittes das dritte Stück. Es mögen im Anschluß hieran gleich drei solche Aufgaben gestellt werden. — Damit ist auch die Möglichkeit gegeben, das Netz des Kegels ohne vorheriges Probieren genau zu zeichnen. Hat man z. B. einen Kreisausschnitt mit einem Radius von 15 cm und einem Centriwinkel von 72° gezeichnet, so muß man noch einen Kreis von 15:5 = 3 cm Halbmesser daransetzen. Und sind Seitenlinie und Halbmesser vorgeschrieben, etwa = 20 und 5 cm, so muß der Centriwinkel zu 360:4 = 90° genommen werden ꝛc.]

II. Flächen: Die Mantelfläche des geraden Kegels giebt, von einer Seitenlinie aus aufgerollt, einen Kreisausschnitt (Fig. 186). Da hier der Centriwinkel meist nicht gegeben ist, so fassen wir den Kreisausschnitt als ein Dreieck auf (§ 67, II b), welches den Bogen des Kreisausschnittes oder die Peripherie des Grundkreises zur Grundlinie und die Seitenlinie AB zur Höhe hat. Die Fläche ist daher = Peripherie des Grundkreises mal Seitenlinie, dividiert durch 2. $\left(= \frac{P.s}{2}\right.$; statt P kann man $2r.\pi$ einsetzen; dann erhält man $\frac{2r.\pi.s}{2} = r.\pi.s.\left.\right)$ — Addiert man zum Mantel noch die Kreisfläche $(r^2.\pi)$, so erhält man die ganze Oberfläche. [$O = r.\pi.s + r^2.\pi$.*)]

III. Rauminhalt: a) Hat man ein kegelförmiges und ein cylinderförmiges Blechgefäß, beide von gleicher Grundfläche und Höhe, so kann man durch Ausschütten des Kegelinhaltes in den Cylinder (Wasser oder Sand) veranschaulichen, daß der Kegel $^1/_3$ „seines" Cylinders ist. — Man kann aber auch sofort an die Berechnung der Pyramide anknüpfen, da wir ja den Kegel als eine Pyramide mit kreisförmiger Grundfläche aufgefaßt haben. Daraus folgt die Regel: Man berechnet den Inhalt eines Kegels, indem man die Grundfläche mit der Höhe multipliziert und das Produkt durch 3 dividiert. Die Grundfläche ist zuvor als Kreis = Radiusquadrat mal 3,14 zu berechnen. $\left(J = \frac{r^2.\pi.h}{3}.\right)$

Ist statt der Höhe die Seitenlinie bekannt, so muß man nach Ib dieses Paragraphen erst die Höhe des Kegels berechnen.

[b) Wie bei der Pyramide, so findet man auch beim Kegel aus dem Inhalt wieder die Höhe, indem man den dreifachen Inhalt durch die Grundfläche dividiert, $\left(h = \frac{3J}{r^2.\pi}\right)$ und die Grundfläche, indem man den dreifachen Inhalt durch die Höhe dividiert. $\left(G = \frac{3J}{h}\right.$, daher $r = \sqrt{\frac{3J}{h.\pi}}.\left.\right)$]

*) Für gefördertere Schüler könnte man diese Formel zur praktischen Benutzung noch bequemer gestalten = $r.\pi.(s+r)$ = halber Umfang mal Summe aus Seitenlinie und Radius.

Digitized by Google

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

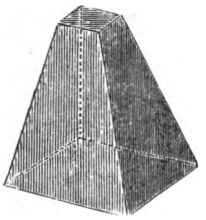
1. Wie findet man aus Halbmesser und Höhe die Seitenlinie des Kegels?
2. Wie berechnet man: a) den Mantel eines geraden Kegels? b) den Inhalt eines jeden Kegels?
3. Wie verhält sich der Kegel zu dem Cylinder, mit welchem er gleiche Grundfläche und Höhe hat?
4. Miß an einem kegelförmigen Körper, z. B. an vorliegendem Modell, Halbmesser und Seitenlinie und berechne daraus: Grundfläche, Mantel, Oberfläche, Höhe, Inhalt (und Centriwinkel des Kreisausschnittes, den der Kegelmantel bildet)!
5. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 44 und 45. (Auswahl!)

§ 85. Beschreibung der abgestumpften Pyramide oder des Pyramidenstumpfes.

I. Entstehung: Man schneide eine Pyramide parallel zur Grundfläche durch, so heißt das untere Stück abgestumpfte Pyramide oder Pyramidenstumpf und das von der Spitze aus abgeschnittene Stück die Ergänzungspyramide.

II. Wesen: Die Schüler erkennen an den vorliegenden Körpern: Der Pyramidenstumpf hat zwei parallele, ähnliche geradlinige Figuren als Grundflächen und so viel Trapeze zu Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat. Er verjüngt sich stetig von unten nach oben. — Der senkrechte Abstand beider Grundflächen ist die Höhe.

Fig. 187.



III. Die Arten entsprechen ganz denjenigen der Pyramiden, aus denen sie entstanden sind.

IV. Das Netz kann wie bei der Pyramide auf doppelte Weise gezeichnet werden, z. B. von der abgestumpften quadratischen Pyramide wie Fig. 188 und Fig. 189.

[V. Vergleichung der Ergänzungspyramide mit der ganzen Pyramide: Nehmen wir eine quadratische Pyramide von 5 cm Grundkante und 12 cm Höhe an, bei welcher in einem Abstande von 4 cm von der Spitze ein Schnitt parallel zur Grundfläche gelegt worden ist; dann sind sämtliche Kanten der Ergänzungspyramide auch $^1/_3$ von denen der ganzen Pyramide, sämtliche Winkel stimmen in beiden Pyramiden überein. Alle Begrenzungsflächen sind daher ähnliche Figuren; die beiden Körper selbst sind ähnliche Körper. Während sich alle gleichgelegenen Linien wie 1:3 verhalten, stehen alle Flächen, z. B. die Grundflächen, im Verhältnis von $1^2:3^2 = 1:9$ (§ 57). Die parallele Schnittfläche ist also $^1/_9$ der Grundfläche. Berechnen wir nun den Rauminhalt beider Pyramiden $\left(= \frac{25.12}{3}$ und $\frac{25}{9} \cdot \frac{12}{3}$, div. durch $3\right)$, so finden wir, daß die Ergänzungspyramide nur $^1/_{27}$ von der ganzen Pyramide ist, daß sich also beide wie 1:27 verhalten, d. i. $= 1^3:3^3$.

Digitized by Google

Fig. 188.

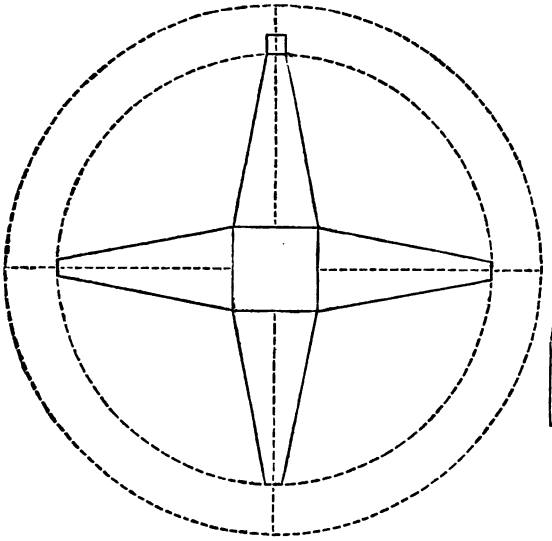
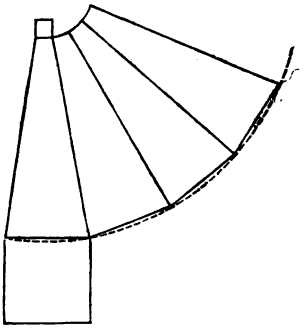


Fig. 189.



Wie früher schon beim Würfel, so finden wir hier bei den Pyramiden das Gesetz: Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die Kubikzahlen gleichgelegener Linien (Kanten, Höhen) ꝛc., und wieder: gleichgelegene Linien ähnlicher Körper verhalten sich wie die Kubikwurzeln aus den Inhalten.]

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie entsteht ein Pyramidenstumpf? Wovon wird er begrenzt?
2. Vergleiche den Pyramidenstumpf nach Zahl und Art der Grund- und Seitenflächen und bezüglich der Verjüngung nach oben: a) mit der Pyramide, b) mit dem Prisma!
3. Bestimme von einem fünfseitigen Pyramidenstumpf die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken!
4. Zeichne das Netz einer abgestumpften quadratischen Pyramide und stelle den Körper daraus her!

[5. Durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt wird bei einer Pyramide von der Spitze aus $^2/_5$ der Höhe abgeschnitten. Welcher Teil sind: a) alle Kanten der Ergänzungspyramide von denen der ganzen; b) die Schnittfläche von der Grundfläche; c) der Inhalt der Ergänzungspyramide von der ganzen?]

§ 86. Berechnung des Pyramidenstumpfes.

1. Praktische, aber ungenaue Berechnungsweise: Man denke sich an den Seiten der abgestumpften Pyramide unten einzelne Stücke abgeschnitten und in umgekehrter Weise oben wieder angesetzt, so erhält man annähernd ein Prisma, welches die mittlere Durchschnitts-

Digitized by Google

fläche als Grundfläche und die Höhe des Stumpfes zur Höhe hat. Daraus ergiebt sich die annähernde Berechnung: Mittlere Durchschnittsfläche mal Höhe. Diese mittlere Durchschnittsfläche kann auf doppelte Weise aufgefaßt werden. Als arithmetisches Mittel zwischen beiden parallelen Grundflächen ist sie die halbe Summe derselben, so daß sich für den Inhalt des Pyramidenstumpfes die bequeme Formel ergiebt: $\frac{G+g}{2}.h$. Nimmt man aber als mittlere Durchschnittsfläche diejenige an, die der Entfernung nach genau in der Mitte zwischen beiden Grundflächen liegt, so ist eine Seite derselben — und nicht die Fläche selbst — das arithmetische Mittel zwischen den Seiten der parallelen Flächen. — Z. B.: Bei einer abgestumpften quadratischen Pyramide von 8 cm unterer, 5 cm oberer Grundkante und 10 cm Höhe beträgt der Inhalt nach der ersten Angabe

$$\frac{64+25}{2}.10 = 445 \text{ ccm},$$

nach der zweiten Angabe $\left(\frac{8+5}{2}\right)^2.10 = \frac{169}{4}.10 = 422\frac{1}{2}$ ccm.

II. Genaue Berechnung: Ein völlig genaues Ergebnis muß entstehen, wenn man vom Inhalt der ganzen Pyramide den der Ergänzungspyramide abzieht. Dazu braucht man aber außer den gegebenen Grundflächen die Höhen beider Pyramiden, während nur die Höhe des Stumpfes gegeben ist. — Da bei der Pyramide die Abnahme der Dicke von unten nach oben, die Verjüngung, eine ganz stetige (proportionale) ist, so läßt sich aus dieser Abnahme der Grundkanten und aus der Höhe des Stumpfes auf die Höhe der Ergänzungspyramide schließen, bei welcher nämlich die Abnahme der oberen Grundkanten bis zur Spitze, d. i. bis Null erfolgen muß. — Man erhält z. B. bei obiger Aufgabe, wo die Grundkanten zuerst um 3 cm abgenommen haben und nun noch bis zur Spitze 5 cm abnehmen müssen, folgende einfache Regeldetri-Aufgabe:

8—5 oder 3 cm Abnahme der Grundkanten erfordern eine Höhe von 10 cm;
noch weitere 5 „ „ „ „ „ „ „ „ „ ? „

$$\text{Antwort: } \frac{10.5}{3} = \underline{16\frac{2}{3} \text{ cm}}.$$

Dann beträgt die Höhe der ganzen Pyramide $16\frac{2}{3} + 10 = 26\frac{2}{3}$ cm.

Inhalt der ganzen Pyramide $= \frac{8^2.26\frac{2}{3}}{3} = \frac{64.80}{9} = 568\frac{8}{9}$ ccm.

Inhalt der Ergänzungspyramide $= \frac{5^2.16\frac{2}{3}}{3} = \frac{25.50}{9} = 138\frac{8}{9}$ ccm.

Folglich Inhalt des Pyramidenstumpfes = dem Unterschiede = 430 ccm.*)

*) Dasselbe Resultat ergiebt die Formel für den Inhalt eines Pyramidenstumpfes, die für unsere Zwecke nicht entwickelt zu werden braucht, $J = \frac{h}{3}(G + \sqrt{G.g} + g)$, wo G und g die beiden Grundflächen bedeuten. Hier ist also

$$J = \frac{10}{3}.(64 + \sqrt{64.25} + 25) = \frac{10}{3}(64 + 40 + 25) = \frac{10}{3}.129 = \underline{430 \text{ ccm}}.$$

Digitized by Google

Diesem genauen Ergebnis kommt von den beiden obigen ungenauen Berechnungsweisen die zweite mit $422\frac{1}{3}$ ccm am nächsten. — Übrigens ergeben weitere Rechenbeispiele, daß die Ungenauigkeit um so größer wird, je mehr die beiden Grundflächen von einander verschieden sind.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

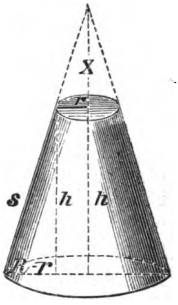
1. Welchem Prisma ist die abgestumpfte Pyramide annähernd gleich?
2. Wie findet man daher annähernd den Inhalt eines Pyramidenstumpfes?
3. Zwischen welchen beiden Pyramiden bildet der Pyramidenstumpf die Differenz?
4. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 42, Nr. 8—15.

§ 87. Beschreibung des abgestumpften Kegels oder des Kegelstumpfes.

I. Vorkommen. In der Natur: Baumstämme ohne Wipfel. Verfertigte Gegenstände: Blumentöpfe, Zuber und andere Gefäße ꝛc.

II. Entstehung: Wie der Pyramidenstumpf aus der Pyramide, so entsteht der Kegelstumpf aus dem Kegel durch einen Schnitt parallel der Grundfläche. Der von der Spitze aus abgeschnittene Körper heißt der Ergänzungskegel.

Fig. 190.

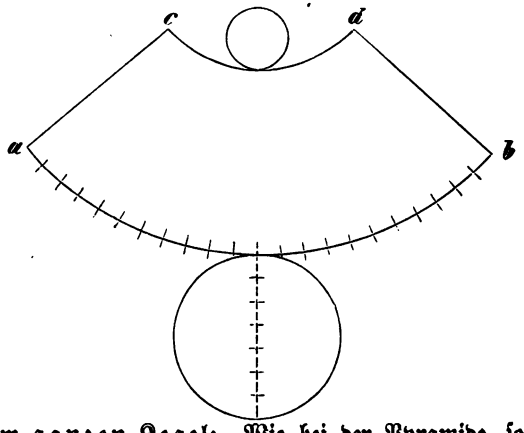


III. Wesen: Der Kegelstumpf ist ein Körper, welcher zwei parallele ungleiche Kreise als Grundflächen und eine einseitig gekrümmte Seitenfläche hat.

IV. Wichtige Linien: Die Erklärungen der Achse, Höhe h, Seiten- oder Mantellinie s ergeben sich von selbst entsprechend dem § 83 (Fig. 190).

V. Arten: Dieselben wie beim Kegel. Wir berücksichtigen hier nur den geraden oder senkrechten Kegelstumpf, bei welchem die Achse auf den Grundflächen senkrecht steht, also zugleich Höhe ist.

Fig. 191.



VI. Netz: Der aufgerollte Mantel eines (geraden) Kegelstumpfes zeigt den Ausschnitt eines Kreisringes, dessen innerer Bogen gleich dem Umfange des oberen Kreises u. dessen äußerer Bogen gleich dem Umfange des unteren Kreises sein muß (Fig. 191).

[VII. Vergleichung des Ergänzungskegels mit dem ganzen Kegel: Wie bei der Pyramide, so ist hier der Ergänzungskegel ähnlich dem ganzen Kegel. Alle gleich-

Digitized by Google

gelegenen Linien beider stehen in gleichem Verhältnis; dagegen die Flächen, z. B. die Grundflächen, verhalten sich wie die Quadrate und die Inhalte wie die Kuben der gleichliegenden Linien, z. B. der Höhen oder der Radien.]

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie entsteht ein Kegelstumpf? Wovon wird er begrenzt?
2. Vergleiche den Kegelstumpf: a) mit dem Kegel, b) mit dem Cylinder!
3. Erkläre die Ausdrücke: Mantel, Achse, Höhe, Seitenlinie!
4. Zeichne einen beliebigen Kreisausschnitt, schneide von demselben Mittelpunkte aus einen solchen mit kleinerem Radius, aber gleichem Centriwinkel ab, schneide den übrigbleibenden Ausschnitt eines Kreisringes aus, rolle ihn zum Kegelstumpf zusammen und füge dann die beiden passenden Grundkreise hinzu!

[5. Von einem Zuckerhut wird ein Stück parallel zur Grundfläche so abgeschlagen, daß der Abstand von der Spitze $^1/_4$ der ganzen Höhe beträgt. Welcher Teil ist: a) der Halbmesser, b) die Grundfläche, c) der Inhalt des abgeschlagenen kegelförmigen Stückes von den betreffenden Raumgrößen des ganzen Kegels? d) Welcher Teil vom ganzen Kegel ist der Kegelstumpf?]

§ 88. Berechnungen am Kegelstumpf.

I. Linien: Aus den beiden Radien R und r und der Höhe h läßt sich die Seitenlinie s berechnen. Man fälle vom Endpunkt des oberen Halbmessers ein Lot auf die untere Grundfläche (Fig. 190), so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die eine Kathete gleich der Höhe h, die andere Kathete gleich dem Unterschiede beider Halbmesser, R—r, (da vom großen Halbmesser der kleine abgeschnitten wird) und die Hypotenuse gleich der Seitenlinie s ist. Mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes läßt sich aus je zwei dieser Seiten die dritte berechnen.

[$s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$; $h = \sqrt{s^2 - (R-r)^2}$; $R - r = \sqrt{s^2 - h^2}$.]

II. Flächen: Der Mantel eines (geraden) Kegelstumpfes ergiebt, von einer Seitenlinie aus aufgerollt, den Ausschnitt eines Kreisringes (Fig. 191). Dieser ist als ein Trapez aufzufassen und daher gleich dem halben Produkt aus der Summe der Parallelen und der Höhe. Die Parallelen sind hier die Peripherien der beiden Kreise, und die Höhe ist die Seitenlinie (nicht die Höhe!) des Kegelstumpfes.

Regel: Man berechnet den Mantel eines Kegelstumpfes, indem man die Summe der beiden Kreisumfänge mit der Seitenlinie multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

$$\left(\frac{[2R\pi + 2r\pi].s}{2}, \text{ oder durch 2 gekürzt } [R\pi + r\pi].s \right.$$
$$\left. \text{oder auch } [R + r]\pi.s.\right)$$

Addiert man hierzu die beiden Kreisflächen, so erhält man die ganze Oberfläche. [$O = R^2.\pi + r^2.\pi + (R + r).\pi.s.$]

Digitized by Google

III. Rauminhalt: a) Ungenaue Berechnungsweise, entsprechend dem Pyramidenstumpf: Mittlere Durchschnittsfläche mal Höhe. Hierbei ist wieder eine doppelte Auffassung möglich: entweder das arithmetische Mittel zwischen den beiden Kreisflächen oder zwischen den beiden Halbmessern.

$$\left[\text{Entweder: } \frac{R^2.\pi + r^2.\pi}{2}.h \text{ oder: } \left(\frac{R+r}{2}\right)^2.\pi.h.\right]$$

Beispiel: Der Radius der unteren Grundfläche sei 9, der der oberen 5, die Höhe 12 cm lang; dann ist der Inhalt, nach der ersten Angabe gerechnet,

$$\frac{9^2.3{,}14 + 5^2.3{,}14}{2}.12 = 1997{,}04 \text{ ccm},$$

nach der zweiten Angabe:

$$\left(\frac{9+5}{2}\right)^2.3{,}14.12 = 1846{,}32 \text{ ccm}.$$

b) Genaue Berechnungsweise: entsprechend der Berechnung des Pyramidenstumpfes, § 86 II.

Beispiel wie oben (III a): Folgende einfache Regeldetri-Aufgabe führt zur Höhe des Ergänzungskegels:

9—5 oder 4 cm Abnahme des Radius erfordern 12 cm Höhe,
noch weitere 5 „ „ „ „ bis zur Spitze erfordern ? cm Höhe.

Antwort: $\frac{12}{4}.5 = 15$ cm Höhe des Ergänzungskegels.*)

Dann beträgt die Höhe des ganzen Kegels $15 + 12 = 27$ cm.

Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{9^2.3{,}14.27}{3} = 2289{,}06$ ccm,

„ „ Ergänzungskegels $= \frac{5^2.3{,}14.15}{3} = 392{,}50$ „

Folglich Inhalt des Stumpfes = dem Unterschiede = 1896,56 ccm.**)

Diesem genauen Ergebnisse kommt von den beiden ungenauen das zweite mit 1846,32 ccm am nächsten.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Wie berechnet man die Seitenlinie aus den beiden Halbmessern und der Höhe eines geraden Kegelstumpfes?
2. Wie berechnet man den Kegelstumpfmantel?
3. Welchem Cylinder ist der Kegelstumpf annähernd gleich? Wie berechnet man ihn daher annähernd?
4. Zwischen welchen beiden Kegeln bildet der Kegelstumpf den Unterschied?
5. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 45 u. ff., Nr. 23—37. (Auswahl!)

*) [Man kann auch diese Höhe des Ergänzungskegels, x, durch die Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke in Fig. 190 ermitteln. In diesen verhält sich $R - r : r = h : x$; mit obigen Zahlen: $4 : 5 = 12 : x$, also $x = 15$ cm.]

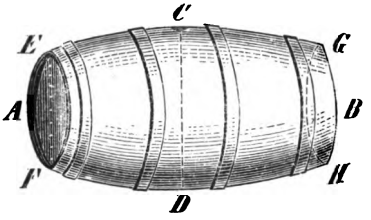
**) Dasselbe Resultat ergiebt die Formel für den Inhalt eines Kegelstumpfes. $J = \frac{h.\pi}{3}(R^2 + R.r + r^2) = \frac{12.3{,}14}{3}.(81 + 45 + 25) = 12{,}56.151 = 1896{,}56$ ccm.

Digitized by Google

§ 89. Berechnung von tonnenartigen Gefäßen.

I. Wesen derselben: Die Tonnengefäße haben, wie der Cylinder, zwei parallele und gleiche kreisförmige Grundflächen; aber die Seitenfläche oder der Mantel ist nicht einseitig, sondern nach zwei Ausdehnungen gekrümmt. Daher kann man auf ihm nicht, wie auf Cylinder- und Kegelmantel, gerade Seitenlinien ziehen. Von der Mitte an nimmt die Weite nach beiden Grundflächen hin ab.

Fig. 192.



Wichtige Linien: Die Durchmesser der beiden Grundflächen, EF und GH (Fig. 192) geben die Bodenweite an; der Durchmesser der mittleren Kreisfläche am Spunde, CD, die Spundweite, der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen oder die Höhe des Körpers giebt die Länge des Fasses an.

II. Berechnung des Inhalts: a) Sieht man von der Wölbung der Dauben ab, so besteht das Faß aus zwei gleichen Kegelstumpfen, die mit ihren großen Grundflächen in CD zusammenstoßen. Demgemäß ist nach § 88, III a der Inhalt annähernd gleich dem Inhalt eines Cylinders, welcher das arithmetische Mittel zwischen dem Boden- und Spundhalbmesser zum Halbmesser der Grundfläche und die Länge des Fasses zur Höhe hat. $\left[\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 . \pi . h.\right]$

b) Um auf die Wölbung der Dauben Rücksicht zu nehmen, nimmt man auch (nach der Lambertschen Formel) das arithmetische Mittel des doppelten Spund- und einfachen Bodenhalbmessers als Halbmesser an. $\left[\left(\frac{2R+r}{3}\right)^2 . \pi . h.\right]$

Neben diesen beiden Berechnungsweisen sind noch viele andere in Gebrauch, die aber alle nur ein annäherndes Resultat ergeben. Wir übergehen dieselben.

Kapitel 14.

Die regelmäßigen (regulären) Körper.

[§ 90. Beschreibung der ebenflächigen regelmäßigen Körper oder Flache. (Reguläre Polyeder.)

Ein Körper wird ein regelmäßiger genannt, wenn er von lauter kongruenten, regelmäßigen Figuren begrenzt ist. An ihm sind daher außer den Begrenzungsflächen auch alle Kanten und alle Winkel unter einander gleich. — Um zu ermitteln, wie viel es derartige Körper geben kann, müssen wir im Auge behalten, daß zur Bildung einer körperlichen Ecke mindestens drei Flächen gehören, daß aber die in einer Ecke zu-

Digitized by Google

sammenstoßenden Kantenwinkel weniger als 360° betragen müssen. Betragen dieselben 360°, so liegen sie in einer Ebene, bilden also keine Ecke mehr. — Beginnen wir mit den regelmäßigen oder gleichseitigen Dreiecken, von denen wir mehrere kongruente ausgeschnitten haben!

I. Der Vierflächner: Legt man zunächst drei gleichseitige Dreiecke in einer Ecke zusammen, so betragen die drei zusammenstoßenden Dreieckswinkel erst $3.60 = 180°$. Eine solche Ecke finden wir an diesem (vorzuzeigenden) Körper (Fig. 193). Da er von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, heißt er Vierflächner oder das Vierflach oder das Tetraëder. Diese vier Dreiecke haben $4.3 = 12$ Seiten, von denen je zwei zu einer Kante zusammenstoßen. Daher hat das Tetraëder sechs Kanten — drei Grund- und drei Seitenkanten. — Die vier Dreiecke haben $4.3 = 12$ Linienwinkel, von denen je drei in einer Ecke zusammenstoßen; daher hat der Vierflächner $12:3 = 4$ Ecken. — Das Tetraëder ist als eine dreiseitige Pyramide aufzufassen. Sein Netz wird durch Fig. 194 dargestellt, worin $\triangle$ A B C als die Grundfläche anzunehmen ist.

Fig. 193.

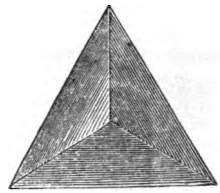
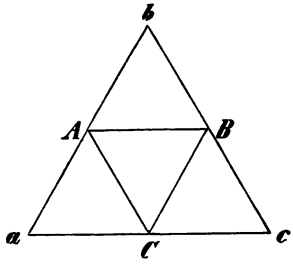


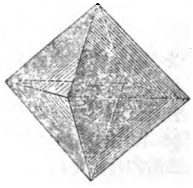
Fig. 194.



II. Der Achtflächner: Auch vier gleichseitige Dreiecke lassen sich in einer Ecke zusammenlegen, da die vier Winkel erst 240° betragen. Der Lehrer zeigt nun den Körper vor, an welchem diese Ecke auftritt, und leitet aus der Zahl der Flächen den Namen Achtflächner oder Achtflach oder Oktaëder ab.

Vorkommen: Krystalle von Alaun, Flußspat, Diamant, Magneteisenstein ꝛc. Die Zahl der Kanten muß $\frac{8.3}{2} = 12$ betragen, vier nach der oberen Spitze, vier nach der unteren Ecke, vier um den Körper herum, ein Quadrat bildend. Die Zahl der Ecken muß, da zur Bildung jeder Ecke vier Dreieckswinkel gehören, $\frac{8.3}{4} = 6$ betragen, eine obere, eine untere, vier an der mittleren quadratischen Durchschnittsfläche. — Das Oktaëder stellt eine Doppelpyramide mit gemeinschaftlicher quadratischer Grundfläche dar. — Fig. 196 zeigt das Netz des Achtflächners.

Fig. 195.



III. Der Zwanzigflächner: Auch fünf gleichseitige Dreiecke geben noch eine Ecke, da $5.60°$ erst $300°$ ergeben. Zähle an diesem Körper (Fig. 197), der solche Ecken aufweist, die Flächen! Daher der Name: Zwanzigflächner oder Zwanzigflach (Ikosaëder).

Zahl der Kanten: $\frac{20.3}{2} = 30$; fünf von der oberen, fünf

Digitized by Google

von der unteren Ecke ausgehend bis zu je einem Kantenfünfeck, fünf am oberen, fünf am unteren Kantenfünfeck, zehn zwischen beiden zickzackförmig

Fig. 196.

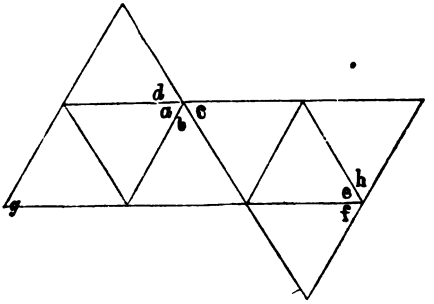
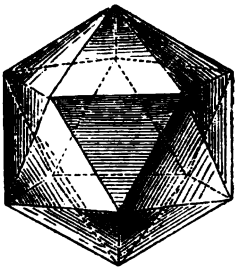
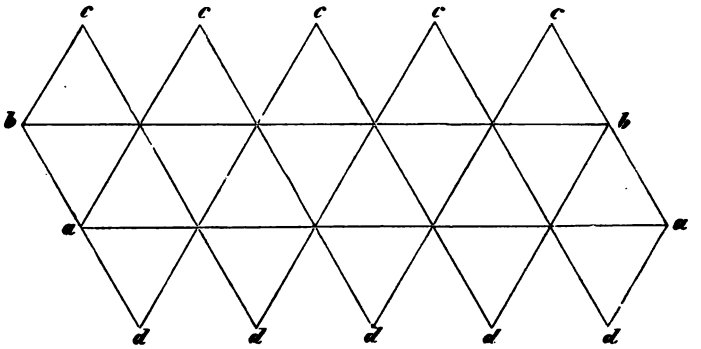


Fig. 197.



auf- und abgehend. Zahl der Ecken: $\frac{20.3}{5} = 12$, da fünf Dreiecks-winkel zu je einer Ecke gehören; eine Ecke oben, eine unten, fünf am oberen, fünf am unteren Kantenfünfeck. — Fig. 198 zeigt das Netz vom

Fig. 198.



Zwanzigflächner. — Versucht man sechs gleichseitige Dreiecke in einer Ecke zusammenzufügen, so kommen sie in eine Ebene zu liegen, da $6.60° = 360°$ sind (die Winkel um einen Punkt herum). Es kann also keinen andern reg. Körper mit gleichseitigen Dreiecken geben, als die genannten drei. — Der Lehrer schneidet nun mehrere kongruente Quadrate aus, um daraus Ecken zu bilden.

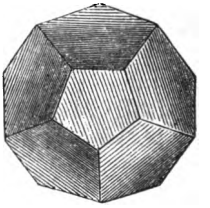
IV. Der Sechsflächner: Drei Quadrate haben in einer Ecke Raum, da $3.90°$ erst $270°$ sind. Wir finden solche Ecken am Würfel. Als reg. Körper heißt er nach der Zahl der Flächen Sechsflächner oder Sechsflach (Hexaëder). Die sechs Quadrate haben $6.4 = 24$ Seiten, von denen je zwei eine Kante bilden; daher Zahl der Kanten

Digitized by Google

$\frac{6.4}{2} = 12$; Zahl der Ecken: $\frac{6.4}{3} = 8$. Siehe über den Würfel § 74, Fig. 165 u. 166. — Vier Quadrate bilden keine Ecke mehr, da 4.90° 360° betragen. Es läßt sich also mit Quadraten nur ein reg. Körper bilden. — Man nimmt nun reg. Fünfecke.

V. Der Zwölfflächner: Drei reg. Fünfecke ergeben eine Ecke, da drei Fünfeckswinkel 3.108° = 324° betragen (§ 40). Zähle an diesem Körper (Fig. 199) die Flächen! Daher der Name: Zwölfflächner oder Zwölfflach (Dodekaëder).

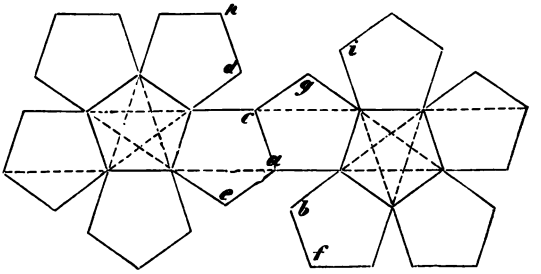
Fig. 199.



Zahl der Kanten: $\frac{12.5}{2} = 30$; fünf an der oberen, fünf an der unteren Grundfläche, fünf von der oberen schräg nach unten, fünf von der unteren schräg nach oben, zehn in der Mitte um den Körper herum in Zickzackform gehend.

Zahl der Ecken: $\frac{12.5}{3} = 20$; fünf an der oberen, fünf an der unteren Grundfläche, 10 an der Zickzacklinie. — Fig. 200 stellt das Netz dar. — Vier reg. Fünfecke ergeben keine Ecke mehr, da 4.108° schon 432° betragen. Also ist nur ein reg. Körper, von reg. Fünfecken begrenzt, möglich. — Stellt man endlich auch noch ausgeschnittene reg. Sechsecke zusammen und zwar zunächst drei, so liegen diese schon in einer Ebene, da 3.120° = 360° sind (§ 40). Somit kann es keine reg. Körper geben, die von reg. Sechsecken, Siebenecken ꝛc. begrenzt werden. Nur die fünf genannten reg. Körper sind möglich. —

Fig. 200.



Weitere Polyëder, wie sie in der Krystallographie als Formen verschiedener Mineralien aufgezählt werden, können nicht als reg. Körper in obigem Sinne bezeichnet werden, so z. B. das Rhomben-Dodekaëder oder Rautenzwölfflach, das nach dem Granat, der in dieser Form krystallisiert, auch Granatoëder genannt wird. Eine weitere Behandlung derselben würde zu weit führen, da schon der Stoff dieses Paragraphen für die einfachsten Schulen ganz zu übergehen, für andere nur zum Teil zu verwenden sein wird.

VI. Eulersches Gesetz: Da, wo Zeit genug vorhanden gewesen ist, in der oben angegebenen Weise außer den Flächen auch die Zahl der Kanten und Ecken festzustellen, wird es von Interesse sein, darin eine allgemeingültige Regel bestätigt zu finden.

Digitized by Google

Reg. Körper.	Zahl der Flächen.	Zahl der Ecken.	Summe der Flächen- u. Eckenzahl.	Zahl der Kanten.
Vierflächner . . .	4	4	8	6
Achtflächner . . .	8	6	14	12
Zwanzigflächner	20	12	32	30
Sechsflächner . .	6	8	14	12
Zwölfflächner . .	12	20	32	30

Aus der schematischen Zusammenstellung geht hervor, daß bei allen diesen Flachen die Zahl der Kanten um zwei kleiner ist, als die Zahl der Flächen und Ecken zusammengenommen. ($K = F + E - 2$). — Prüfe daraufhin noch andere eckige Körper, z. B. das fünfseitige Prisma (7 Flächen, 10 Ecken, 15 Kanten), die sechsseitige Pyramide (7 Flächen, 7 Ecken, 12 Kanten) ꝛc. Dieses somit für alle eckigen Körper (oder Polyëder) geltende Gesetz heißt das Eulersche Gesetz.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist ein reg. Körper?
2. Welche drei reg. Körper werden von gleichseitigen Dreiecken, welcher von Quadraten, welcher von reg. Fünfecken begrenzt?
3. Zeichne die Netze der vier ersten; versuche auch das des fünften reg. Körpers zu zeichnen und dann die Körper daraus herzustellen!
4. Weise das Eulersche Gesetz von der Anzahl der Kanten an den fünf reg. Körpern, sodann an dem achtseitigen Prisma, der siebenseitigen Pyramide und dem sechsseitigen Pyramidenstumpf nach!]

[§ 91. Berechnung der reg. Körper oder Flache.

I. Oberfläche: Beim reg. Vier-, Acht- und Zwanzigflächner besteht die Oberfläche aus lauter kongruenten gleichseitigen Dreiecken, ist daher das Vier-, Acht- bzw. Zwanzigfache von dem Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks (§ 55). Der Würfel ist schon in § 74 behandelt. — Die Berechnung des Fünfecks aus einer Seite und somit der Oberfläche des Zwanzigflächners aus einer Kante geht über unsere Ziele hinaus.

II. Inhalt: a) Das Tetraëder ist als dreiseitige Pyramide = Grundfläche mal Höhe, dividiert durch 3. Die Grundfläche ist als gleichseitiges Dreieck nach § 55 zu berechnen, und die Höhe des Tetraëders kann nach dem Pythagoreischen Lehrsatze aus der Kantenlänge ermittelt werden, so daß sich schließlich für den Inhalt die Formel $\frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}$ ergiebt, wobei a eine Kante bedeutet. Doch ist die Entwickelung zu schwierig.

b) Das Oktaëder ist als quadratische Doppelpyramide zweimal quadratische Schnittfläche mal halbe Eckenachse, dividiert durch 3. Das Quadrat ist durch eine Kante bestimmt und die Eckenachse als halbe Diagonale eines gleichen Quadrates nach dem Pythagoreischen Lehrsatze zu ermitteln. Doch ist die Entwickelung auch von dieser Formel $\left(J = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2}\right)$ nur geförderteren Schülern zuzumuten.

Digitized by Google

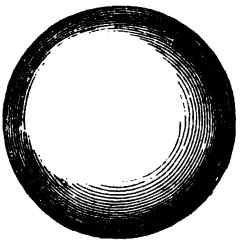
c) Zwanzig- und Zwölfflächner erfordern noch größere Vorkenntnisse, und der Sechsflächner ist als Würfel schon in § 76 berechnet worden.]

§ 92. Beschreibung des krummflächigen regelmäßigen Körpers oder der Kugel.

I. Vorkommen. In der Natur: Wurzelknollen, Galläpfel, Früchte, Augapfel, Wassertropfen, Himmelskörper ꝛc. Verfertigte Gegenstände: Kegelkugel, Spielball, Glaskugeln, Globus ꝛc.

II. Wesen: Wieviel Begrenzungsflächen hat die Kugel nur? Was für eine Fläche ist dies? Ziehe von einem Punkte aus auf dieser Kugel, etwa dem Globus, nach den verschiedensten Richtungen hin Linien! Was für Linien werden es stets? Die Oberfläche ist also nach allen Seiten gekrümmt. Dasselbe ist auch z. B. bei einem Körper von der Form eines Hühnereies der Fall. Aber bei der Kugel ist die Krümmung überall eine gleichmäßige. Wovon ist sie überall gleich weit entfernt?

Fig. 201.



Erklärung: Eine Kugel ist ein Körper, welcher von einer allseitig gekrümmten Oberfläche begrenzt wird, die in allen ihren Punkten gleichweit von einem Punkte innerhalb der Kugel, dem Mittelpunkt, entfernt ist.

III. Wichtige gerade Linien der Kugel: Eine Linie vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche der Kugel durchmißt die Kugel nur halb, heißt daher Kugelhalbmesser. Die unendlich vielen Halbmesser sind alle gleich. Eine gerade Linie, welche zwei Punkte der Oberfläche verbindet und dabei durch den Mittelpunkt geht, durchmißt die Kugel ganz und heißt Kugeldurchmesser. Derselbe ist doppelt so groß als der Kugelhalbmesser; daher sind auch alle Kugeldurchmesser untereinander gleich. Ist die Kugel beweglich, wie der Globus, so heißt der Durchmesser, um welchen sie sich dreht (rotiert), die Achse, und ihre beiden Endpunkte heißen die Pole.

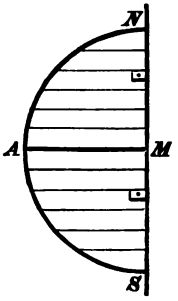
IV. Schnittflächen der Kugel und Linien auf der Kugeloberfläche: Der Lehrer durchschneidet einen kugelförmigen Körper (Apfel, Kartoffel ꝛc.) auf verschiedene Weise. Die Schüler erkennen: Stets wird die Schnittfläche ein Kreis, der um so größer wird, je näher der Schnitt dem Mittelpunkte liegt. Am größten wird er, wenn er selbst durch den Mittelpunkt hindurch geht, wenn also der Kugelhalbmesser zugleich der Halbmesser des Kugelkreises ist. Man nennt ihn darum einen größten Kugelkreis. Zeige einige größte Kugelkreise! Wie sind alle, da sie denselben Halbmesser haben? Bei einer sich drehenden Kugel (Globus) nennt man den größten Kugelkreis, der überall gleichweit von beiden Polen entfernt ist (und senkrecht zur Achse steht), den Aquator, d. h. Gleicher, weil er die Kugel in zwei gleiche Teile,

Digitized by Google

Halbkugeln, zerlegt. Nördliche und südliche Erdhalbkugel. Kugelkreise, die parallel zum Äquator gezogen werden, heißen Parallel- oder Breitenkreise. Da zwischen dem Äquator und je einem Pol ein Quadrant (90°) liegt, so können nördlich und südlich vom Äquator je 90 Parallelkreise im Abstande von einem Grad gezogen werden. Diese werden nach den Polen zu immer kleiner; der 90. ist eigentlich gar nicht mehr vorhanden, sondern fällt mit dem Pol zusammen. Legt man von Pol zu Pol, also durch die Achse, größte Kugelkreise, so erhält man die Längenkreise oder Meridiane. Diese sind alle gleich groß, aber nähern sich vom Äquator nach den Polen zu immer mehr, während die Parallelkreise auf der Kugeloberfläche überall gleichweit von einander entfernt sind.

V. Entstehung: Man nehme eine halbkreisförmige Scheibe und drehe dieselbe um den Durchmesser, bis sie in ihre erste Lage zurückkehrt (Fig. 202), so durchläuft dieselbe den Raum einer Kugel. Was wird Punkt M in der Kugel? Linie NS? (Achse.) Die Punkte N und S? (Pole.) Was für einen Kugelkreis bildet AM? (Einen größten.) Was für Kugelkreise bilden die zu AM parallel gezogenen Linien? (Kleinere Kugelkreise, und zwar Parallelkreise.) Welche Linie durchläuft der Punkt A? (Äquator.) Welche Fläche durchläuft die Peripherie des Halbkreises? (Kugeloberfläche.) Was stellt sie an der Kugeloberfläche stets dar? (Meridian.)

Fig. 202.



VI. Teile der Kugel: Veranschaulichung an einem Apfel ꝛc. Jeder größte Kugelkreis teilt die Kugel in zwei Halbkugeln (Hemisphären) (Fig. 203); nördliche und südliche, westliche und östliche Erdhälfte. — Jeder andere Schnitt ergiebt zwei ungleiche Kugelabschnitte oder Kugelsegmente (Fig. 204 gfk und gyk). Jeder derselben wird von einem Kugelkreise (Durchmesser gk) und einem Teil der Kugeloberfläche begrenzt. Letzteren, z. B. gfk, nennt man Kugelkappe oder Kalotte, z. B.: die nördliche kalte und die südliche kalte Zone auf der Oberfläche der Erdkugel. — Ein Teil der Kugel zwischen zwei parallelen Kugelkreisen heißt Kugelschicht (z. B. Apfelschnitten), wie acgk und acdb, oder körperliche Kugelzone; der entsprechende Teil der Kugeloberfläche Kugelzone, z. B. die gemäßigten Zonen und die heiße Zone auf der Erdoberfläche. — Der Teil der Kugel, welcher in Fig. 204 durch ixyz dargestellt werden soll, besteht aus einem Kugelabschnitt xyz und dem Kegel ixz, dessen Grundfläche mit dem Kugelkreise des Kugelabschnittes

Fig. 203.

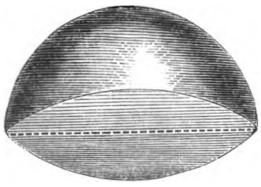
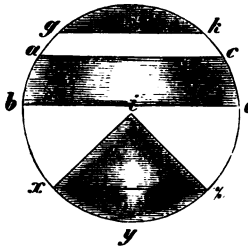


Fig. 204.



Digitized by Google

und dessen Spitze mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt. Man nennt diesen Teil Kugelausschnitt oder Kugelsektor. Er kann dadurch entstanden gedacht werden, daß ein Kreisausschnitt sich um einen seiner Halbmesser dreht. — Zwei halbe größte Kugelkreise treffen sich stets in einem Kugeldurchmesser und schneiden ein körperliches Kugelzweieck heraus, das von zwei Halbkreisen und einem Teil der Kugeloberfläche begrenzt wird (z. B. bei der Apfelsine die sich loslösenden Streifen). Diese krumme Fläche heißt Kugelzweieck oder Kugelstreifen; z. B. auf dem Globus der Streifen zwischen zwei Meridianen.

VII. Netz: Da die Kugel allseitig gekrümmt ist, so läßt sich ihre Oberfläche nicht in einer Ebene ausbreiten, z. B. die aufgeschnittene Apfelsinenschale läßt sich nicht platt ausbreiten. Daher kann zur Kugel kein genaues Netz gezeichnet werden. Will man eine Kugel mit Papier oder Zeug überziehen, so muß man möglichst viele schmale Streifen herstellen, die ungefähr einem Kugelzweieck entsprechen und von Pol zu Pol zu legen sind.

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Was ist eine Kugel?
2. Erkläre die Ausdrücke: Halbmesser, Durchmesser, Achse, Pole; größter Kugelkreis, Äquator, Parallelkreise, Längenkreise; Halbkugel, Kugelabschnitt, körperliche Kugelzone oder Kugelschicht, körperliches Kugelzweieck, Kugelausschnitt; Kugelhaube, Kugelzone, Kugelzweieck!
3. Gieb an, was bei der Drehung eines Halbkreises um den Durchmesser die einzelnen Punkte und Linien des Halbkreises bei der Kugel bilden!
4. Der Halbmesser der Erde beträgt 860 Meilen oder 6375 km; wie groß ist: a) der Durchmesser, b) der Umfang eines größten Kugelkreises, z. B. der Äquator, c) ein Grad des Äquators, d) der Abstand zwischen zwei Breitenkreisen auf der Erdoberfläche?

§ 93. Berechnung der Kugeloberfläche.

Die mathematische Entwickelung der Formel für die Oberfläche der Kugel ist zu schwierig, als daß sie hier erörtert werden müßte. Auf folgende Weise läßt sich die Berechnungsart veranschaulichen: Man umwickelt die Kugeloberfläche von einem Pol bis zum andern mit gleich starkem Bindfaden, der zum bessern Anliegen mit Wachs getränkt sein mag, desgleichen den Mantel des dazugehörigen „Kugelcylinders", d. i. eines solchen Cylinders, der den Kugeldurchmesser zum Durchmesser seiner Grundfläche und auch zur Höhe hat, so daß also die Kugel gerade in ihn hineinpassen würde. Vergleicht man die abgewickelten Fäden, so ergiebt sich deren gleiche Länge. Also müssen sie auch gleiche Flächen bedeckt haben, oder die Kugeloberfläche ist gleich dem Mantel „ihres" Cylinders. Dieser ist aber als aufgewickeltes Rechteck (§ 80) gleich Umfang mal Höhe oder hier Umfang mal Durchmesser.

Regel: Man berechnet die Kugeloberfläche, indem man den Umfang mit dem Durchmesser der Kugel multipliziert.

Halber Umfang mal Halbmesser ergab (nach § 65) den Inhalt

Digitized by Google

der Kreisfläche. Ganzer Umfang mal Durchmesser ergiebt ein viermal so großes Produkt. Daraus folgt die leichter zu behaltende Regel: Die Kugeloberfläche ist gleich dem vierfachen größten Kugelkreise.

[Entwicklung mit Buchstaben: Cylindermantel $= 2r.\pi.h$ (§ 80), oder da h hier $= 2r$ ist, $= 2r.\pi.2r = 4r^2.\pi$, das ist viermal so groß als $r^2.\pi$.]

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Welchem Cylindermantel ist die Kugeloberfläche gleich?
2. Wie verhält sich die Kugeloberfläche zur Fläche des größten Kugelkreises?
3. Berechne die Erdoberfläche aus dem Erdhalbmesser!
4. Das Wievielfache ist die gesamte Oberfläche: a) einer Halbkugel von der Fläche des größten Kugelkreises? (Halbe Kugeloberfläche und ein größter Kugelkreis!) — b) einer Viertelkugel? (Viertelkugeloberfläche und zwei halbe größte Kugelkreise; veranschaulichen an einem Apfel!)
5. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 51.

§ 94. Berechnung des Kugelinhalts.

I. Man denke sich die Kugel in unzählig viele Pyramiden zerlegt, die alle ihre Spitze im Kugelmittelpunkt und zur Höhe den Kugelhalbmesser haben und deren Grundflächen zusammen die Kugeloberfläche bilden. Diese Pyramiden sind zusammen gleich einer Pyramide, welche die Kugeloberfläche zur Grundfläche und den Kugelradius zur Höhe hat. Der Inhalt derselben ist Grundfläche mal Höhe, dividiert durch 3. Daher gilt die Regel: Man berechnet den Inhalt einer Kugel, indem man zuerst die Kugeloberfläche berechnet, diese dann mit dem Halbmesser multipliziert und das Produkt durch 3 dividiert.

[Mit Buchstaben: $J = \frac{O.r.}{3}$ Für O kann man nach § 93 $4r^2.\pi$ einsetzen; also $J = \frac{4r^2.\pi.r}{3} = \frac{4}{3}r^3.\pi$.]

II. Zu gleichem Ergebnisse führt folgende Veranschaulichung: Man nehme wieder wie in § 93 eine Kugel nebst „ihrem" Cylinder. Sind beide hohl, so fülle man den Inhalt der Kugel, Wasser oder Sand, in den leeren Cylinder, so wird dieser nur zu $^2/_3$ gefüllt. Sind beide massiv und aus gleichem Stoffe, so findet man mittelst einer Wage dasselbe Verhältnis.

Gesetz: Die Kugel enthält $^2/_3$ von dem Inhalt ihres Cylinders*). Der Cylinder ist aber gleich Grundfläche mal Höhe (§ 80), d. i. hier größter Kugelkreis mal Durchmesser. Für die Kugel ergiebt sich daher die Regel: Man findet den Inhalt einer Kugel, wenn man die Fläche des größten Kugelkreises mit dem Durchmesser und dieses Produkt mit $^2/_3$ multipliziert.

*) Der mathematische Beweis für die Richtigkeit dieses Verhältnisses zwischen Kugel und Cylinder ist, als zu schwierig, nicht mit aufgeführt worden.

Digitized by Google

[Mit Buchstaben: Größter Kugelkreis $= r^2.\pi$, Höhe oder Durchmesser $= 2r$, also $J = r^2.\pi.2r.\frac{2}{3} = \frac{4}{3}r^3.\pi$.]

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Welcher Pyramide ist der Inhalt einer Kugel gleich? Wie wird sie daher berechnet?
2. Welcher Teil ist der Inhalt der Kugel von „ihrem" Cylinder?
3. Berechne den Kubikinhalt der Erdkugel aus dem Erdhalbmesser!
4. Miß den Umfang unseres Globus und berechne daraus zunächst den Halbmesser, dann aus diesem die Fläche des größten Kugelkreises, die Oberfläche und den Inhalt des Globus!
5. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 47—52. (Auswahl!)

[§ 95. Einige schwierigere Berechnungen an der Kugel.

I. Berechnung des Kugelhalbmessers: a) aus dem Umfange: ebenso wie beim Kreise in § 15. $\left(r = \frac{U}{2\pi}.\right)$

b) aus der Fläche des größten Kugelkreises: nach § 65. $\left(r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}.\right)$

c) aus der Kugeloberfläche: Da die Oberfläche das Vierfache eines größten Kugelkreises ist, so findet man letzteren, wenn man die Oberfläche durch 4 dividiert, und aus diesem sucht man nach § 65 den Halbmesser. $\left(r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}.\right)$

(d) aus dem Kugelinhalt: Da $\frac{4}{3}r^3.\pi = J$ ist, so

$$\text{ist } 4r^3.\pi = 3J$$
$$r^3 = \frac{3J}{4\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}}.)$$

II. Verhältnis zweier Kugeln: Man lasse von zwei Kugeln, deren Halbmesser etwa 1 und 3 m betragen, Umfang, Oberfläche und Inhalt berechnen, so wird sich durch Vergleichung der Resultate bei beiden Kugeln folgendes ergeben:

a) Die Umfänge (1:3) verhalten sich wie die Halbmesser.

(Begründung: $U = 2R.\pi$; $u = 2r\pi$,
also $U:u = 2R.\pi:2r\pi$ oder
$= R:r$.)

b) Die Oberflächen (1:9) verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser.

Digitized by Google

(Begründung: $O = 4.R^2.\pi$; $o = 4r^2.\pi$;
$O:o = 4R^2.\pi:4r^2.\pi$ oder
$= R^2:r^2$.)

c) Die Inhalte (1:27) verhalten sich wie die Kuben (Kubikzahlen) der Halbmesser.

(Begründung: $J = \frac{4}{3}.R^3.\pi$; $i = \frac{4}{3}r^3.\pi$,

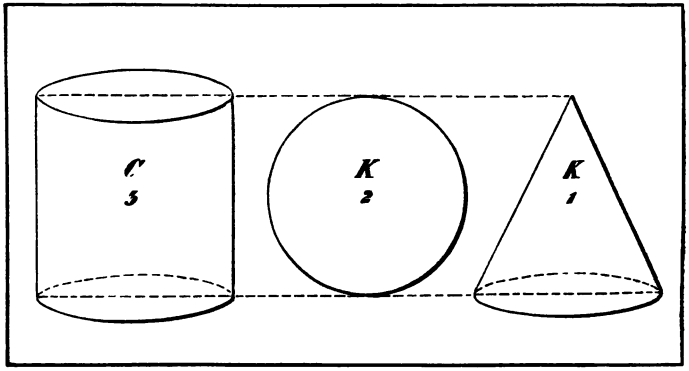
also $J:i = \frac{4}{3}R^3.\pi:\frac{4}{3}r^3.\pi$ oder
$= R^3:r^3$.)

III. Hohlkugeln: Den Inhalt der Wandung einer Hohlkugel (Kugelschale) findet man, wenn man vom Inhalt der ganzen Kugel den Inhalt des inneren kugelförmigen Hohlraumes abzieht.

$$\left(J = \frac{4}{3}.R^3.\pi - \frac{4}{3}r^3\pi \text{ oder auch} \right.$$
$$\left. = [R^3 - r^3].\frac{4}{3}\pi.\right)$$

IV. Verhältnis zwischen Cylinder, Kugel und Kegel mit gleichem Durchmesser und gleicher Höhe (Fig. 205). Da

Fig. 205.



nach § 94 die Kugel $^2/_3$ ihres Cylinders, der Kegel aber nach § 84 $^1/_3$ dieses Cylinders ist, so verhalten sich diese 3 Körper $= 1:^2/_3:^1/_3$ oder 3:2:1. Dieses Gesetz ist zuerst von Archimedes aufgefunden worden.

V. Teile der Kugel und Kugeloberfläche: Nachstehende Formeln werden nur zu etwaigem Gebrauche angeführt; von einer Entwicklung und Begründung muß hier abgesehen werden:

a) Kalotte und auch Kugelzone $= 2r.\pi.h$, wobei h die Höhe der Kalotte oder der Kugelzone bedeutet.

b) Inhalt eines Kugelabschnittes $= \frac{h^2.\pi}{3}(3r - h)$.

Digitized by Google

c) Inhalt einer körperlichen Kugelzone oder Kugelschicht

$$= \frac{h.\pi}{6}.(3a^2 + 3b^2 + h^2),$$

wobei a u. b die Halbmesser der beiden begrenzenden Kugelkreise bedeuten.

d) Inhalt eines Kugelausschnittes $= \frac{2}{3}.r^2.\pi.h.$

VI. Beziehung zwischen Oberfläche und Inhalt der Körper: Berechnet man von mehreren Körpern, wie: Würfel, Kugelcylinder, Tetraëder, Kugel ꝛc., die alle denselben Inhalt (etwa 1 cbm) haben, die Oberfläche, so findet man das Gesetz: Von allen Körpern mit gleichem Inhalt hat die Kugel die kleinste Oberfläche, daher auch umgekehrt: Von allen Körpern mit gleicher Oberfläche hat die Kugel den größten Inhalt. (Vgl. § 50 der Planimetrie.)

Zusammenfassende Fragen und Aufgaben.

1. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 48, Nr. 10—13. 15. 16.
2. Die Halbmesser a) zweier Reifen von gleicher Breite und Dicke, b) zweier hohlen Gummibälle von gleicher Wandstärke, c) zweier massiven Gummibälle von gleichem Stoff verhalten sich = 2:5. Wievielmal so schwer ist in den drei Fällen der zweite Gegenstand als der erste? ($2\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, $15\frac{5}{8}$.)
3. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 50, Nr. 36, 37, 39, 40.
4. Wie verhalten sich Cylinder, Kugel und Kegel mit gleichem Durchmesser und gleicher Höhe?
5. Welcher Körper hat von allen Körpern mit gleichem Inhalt die kleinste Oberfläche?
6. Kehr, Geom. Rechenaufg., S. 49, Nr. 28. 29. 32.]

Sechster Abschnitt.

Die geometrisch unmeßbaren Körper.

Kapitel 15.

§ 96. Die indirekte Messung der geometrisch unmeßbaren Körper.

Bisher haben wir diejenigen Körper betrachtet, welche geometrisch meßbar waren (Prisma und Cylinder — Pyramide und Kegel — Pyramiden- und Kegelstumpf — reg. Flache und Kugel); es giebt aber Körper, welche so unregelmäßig sind (z. B. unbehauene Steine) und welche so viele Unebenheiten (Erhöhungen und Vertiefungen) haben, daß es nicht möglich ist, derartige Körper direkt zu messen. Man nennt sie deshalb geometrisch unmeßbare.

Sind derartige Körper nicht zu groß, so läßt sich übrigens trotz ihrer Unregelmäßigkeit dennoch ihr kubischer Inhalt bestimmen. Man legt nämlich den betreffenden Körper in ein Gefäß — am besten in einen

Digitized by Google

großen Cylinder oder in ein Parallelepipedon — und übergießt den zu messenden Stein ꝛc. im Gefäße so weit mit Wasser oder mit feinem Sand, bis er davon ganz überdeckt ist. Feinen Sand wendet man statt des Wassers besonders dann an, wenn der zu messende Körper leichter ist, als die gleiche Wassermasse, oder wenn sich derselbe im Wasser auflöst, z. B. ungelöschter Kalk. — Man mißt nun zuerst den kubischen Inhalt der Wasser- oder Sandmasse. Darauf entfernt man den Stein ꝛc. und mißt wiederum die Wasser- oder Sandmasse. Der gefundene Unterschied des kubischen Inhaltes in beiden Rechnungen zeigt den Inhalt des Steins ꝛc. an. In einem Cylinder von 0,2 qm Grundfläche werde z. B. ein Stein gelegt und mit Wasser übergossen, so daß das Wasser 0,85 m hoch steht. Der Kubikinhalt der Wassermenge und des Steines beträgt also $0{,}2 \times 0{,}85 = 0{,}17$ cbm. Nach Entfernung des Steines sinkt das Wasser um 8 cm; folglich ist der Kubikinhalt der Wassermasse ohne Stein $= 0{,}2 \times 0{,}77 = 0{,}154$ cbm. Der Kubikinhalt des Steines beträgt demnach $0{,}17 - 0{,}154$ cbm $= 0{,}016$ cbm.

Die Wiederholung der Stereometrie

läßt sich in ganz instruktiver Weise mit der Wiederholung der Planimetrie verbinden. Am Prisma lassen sich z. B. die Lehrsätze über die Parallelogramme und Vielecke, an den Prismenkanten die verschiedenen Linien, Winkel ꝛc. wiederholen. Am Cylinder wird die Kreislehre wiederholt, bei der Pyramide die Lehre von den Dreiecken, beim Kegel der Pythagoreische Lehrsatz ꝛc. Gerade durch solche Verbindungen wird die Sache für den Schüler interessant und behaltbar, und der Schüler, dessen Beobachtungsvermögen dadurch außerordentlich geschärft wird, lernt die Geometrie mehr und mehr als eine Wissenschaft des praktischen Lebens oder — wie Fresenius sagt — als eine Grammatik der Natur betrachten.

„Eins muß in das andre greifen,
Eins durchs andre blühn und reifen."

Druck der Engelhard-Reyher'schen Hofbuchdruckerei in Gotha.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

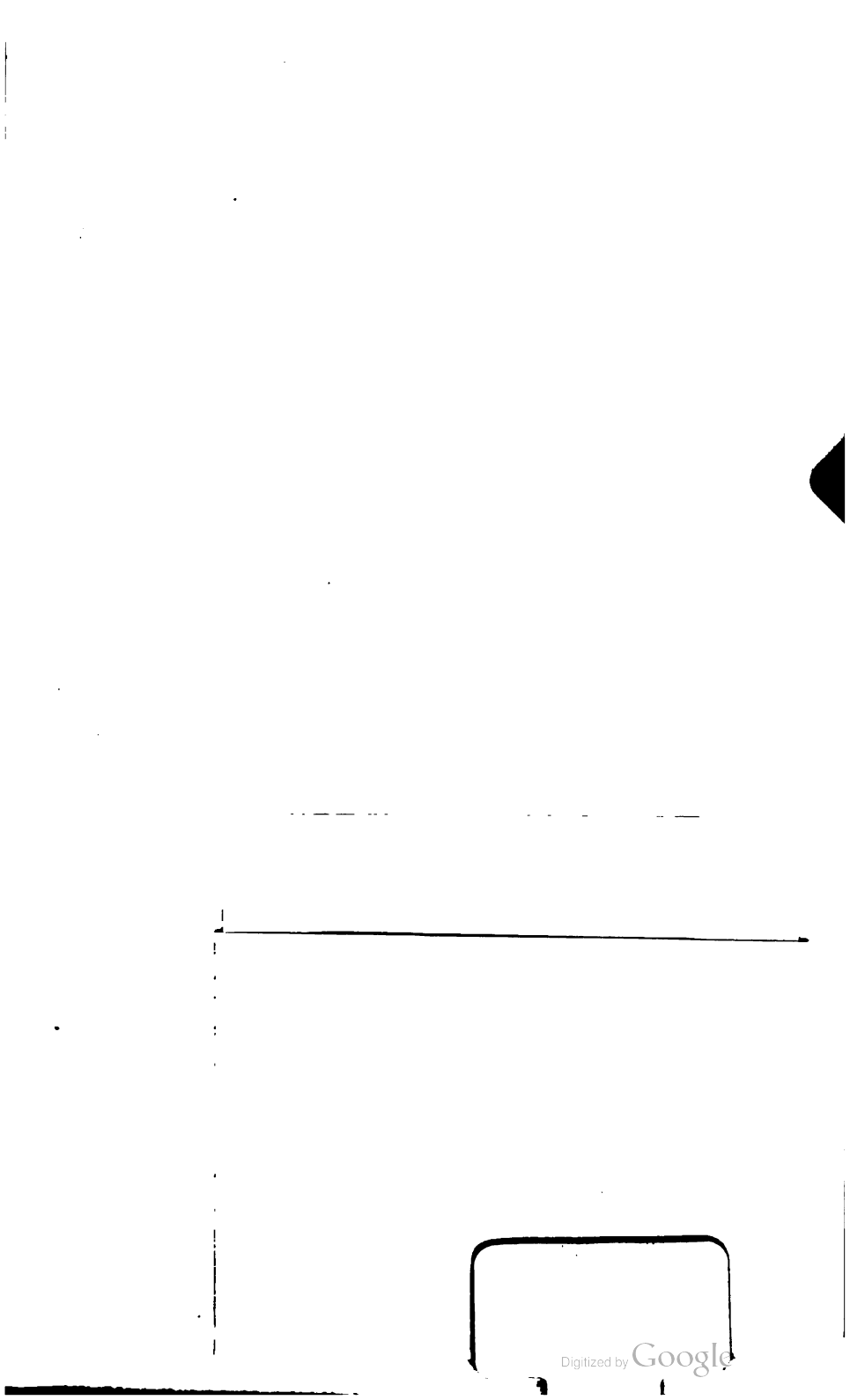
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Acme
Bookbinding Co., Inc.
100 Cambridge St.
Charlestown, MA 02129

Digitized by Google


Digitized by Google

Math 8108.91
Praktische geometrie fur volks- un
Cabot Science 003370472
3 2044 091 926 907